

# Глава 1. Случайные события

## § 1. События и операции над ними

Классический подход к определению основных понятий теории вероятностей предполагает наличие возможностей для многократного осуществления какого-либо испытания при неизменных условиях. Качественный результат такого испытания называют *событием*.

Если событие никогда не наступает при осуществлении испытания, то оно называется *невозможным*. Невозможное событие обозначают  $\emptyset$ .

Если при каждом осуществлении испытания событие наступает обязательно, то оно называется *достоверным*. Достоверное событие обозначают  $\Omega$ .

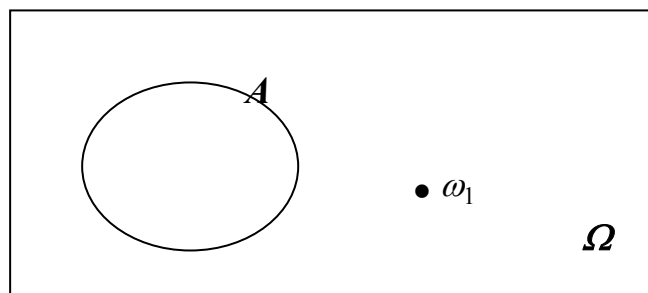
Если при осуществлении испытания событие может наступить, а может и не наступить, то оно называется *случайным*.

Случайные события принято обозначать латинскими буквами  $A, B, C \dots$

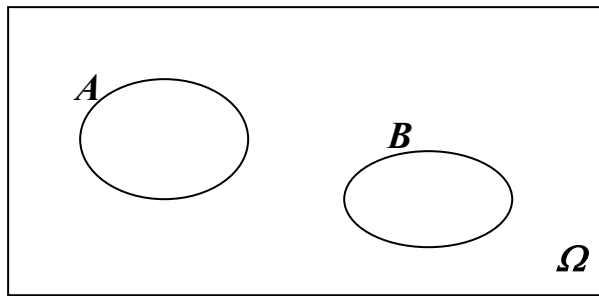
Если событие нельзя разложить на более простые события, тогда оно называется *элементарным*.

Элементарные события, как правило, обозначают  $\omega_1, \omega_2, \dots$

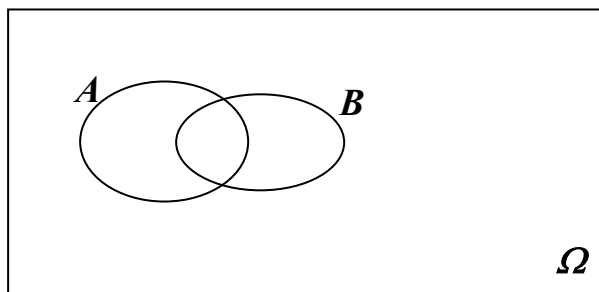
Пространством событий называют множество всех возможных событий, связанных с данным опытом (испытанием). Пространство событий принято обозначать  $\Omega$  и изображать как универсальное множество. Тогда область наступления какого-либо события  $A$  можно изобразить как подмножество, а элементарное событие - как точку в пространстве  $\Omega$ .



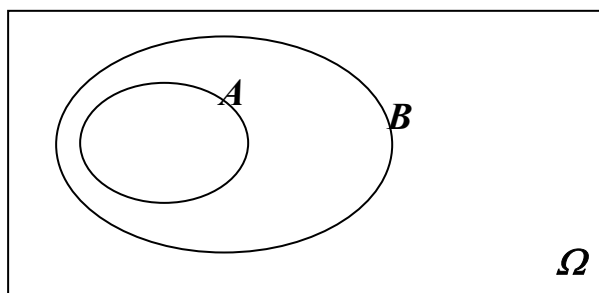
Если события не могут наступить одновременно в одном и том же испытании, то их называют **несовместными**:



Если события могут наступить одновременно в одном и том же испытании, то их называют **совместными**:



Если в одном и том же испытании при наступлении события  $A$  событие  $B$  наступает обязательно, то говорят, что  $A$  **благоприятствует**  $B$ :



Если событие  $A$  благоприятствует  $B$  и, одновременно,  $B$  благоприятствует  $A$ , то события  $A$  и  $B$  определяются как равные или тождественные.

С событиями выполнимы операции сложения, вычитания и умножения. Результат действия операции определяется как новое событие, область наступления которого можно отмечать штриховкой на диаграмме. Определять новое со-

бытие можно и заполняя таблицу значимости, в которой 1 обозначает наступление события, а 0 отмечает, что событие не наступило.

**Суммой**  $A + B$  двух событий называют новое событие, состоящее в том, что наступило *хотя бы одно* из событий  $A$  или  $B$ .

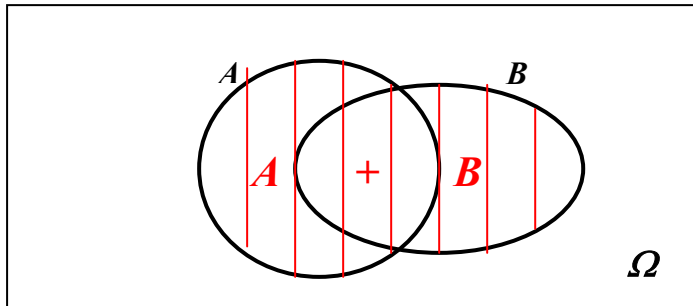


Таблица значимости для суммы событий имеет вид:

| $A$ | $B$ | $A+B$ |
|-----|-----|-------|
| 1   | 1   | 1     |
| 1   | 0   | 1     |
| 0   | 1   | 1     |
| 0   | 0   | 0     |

**Разностью**  $A - B$  двух событий называют новое событие, состоящее в том, что  $A$  наступило, а  $B$  – не наступило.

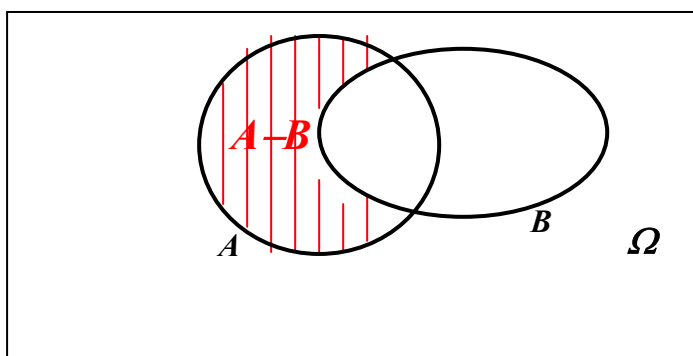


Таблица значимости для разности событий имеет вид:

| $A$ | $B$ | $A-B$ |
|-----|-----|-------|
| 1   | 1   | 0     |
| 1   | 0   | 1     |
| 0   | 1   | 0     |
| 0   | 0   | 0     |

Можно рассмотреть разность  $\Omega - A$ . Это будет новое событие, состоящее в том, что  $A$  не наступило. Такое событие называют *противоположным к событию  $A$*  и обозначают  $\bar{A}$ .

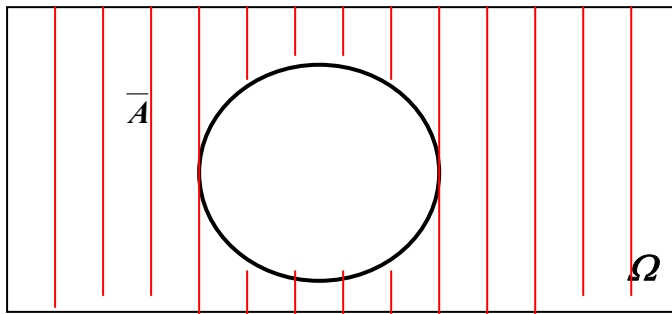


Таблица значимости для противоположного события имеет вид:

| $A$ | $\bar{A}$ |
|-----|-----------|
| 1   | 0         |
| 0   | 1         |

*Произведением  $AB$*  двух событий называют новое событие, состоящее в том, что наступило *каждое* из событий  $A$  или  $B$ .

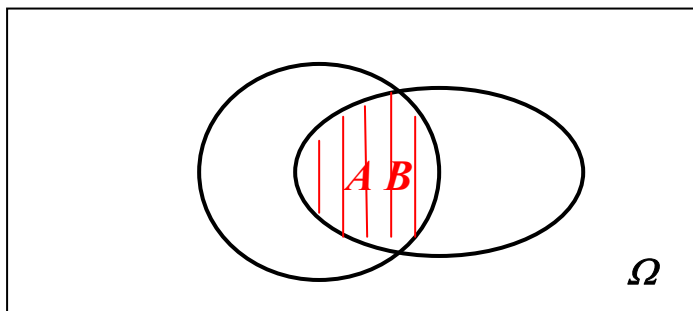


Таблица значимости для произведения событий имеет вид:

| $A$ | $B$ | $AB$ |
|-----|-----|------|
| 1   | 1   | 1    |
| 1   | 0   | 0    |
| 0   | 1   | 0    |
| 0   | 0   | 0    |

Отметим, что определение суммы и произведения событий обобщаются на любое количество компонент. Так, суммой событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называют новое событие  $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ , состоящее в том, что наступило *хотя бы одно* из событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Аналогично, произведением событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$

называют новое событие  $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$ , состоящее в том, что наступило *каждое* из событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

Имеют место следующие равенства:

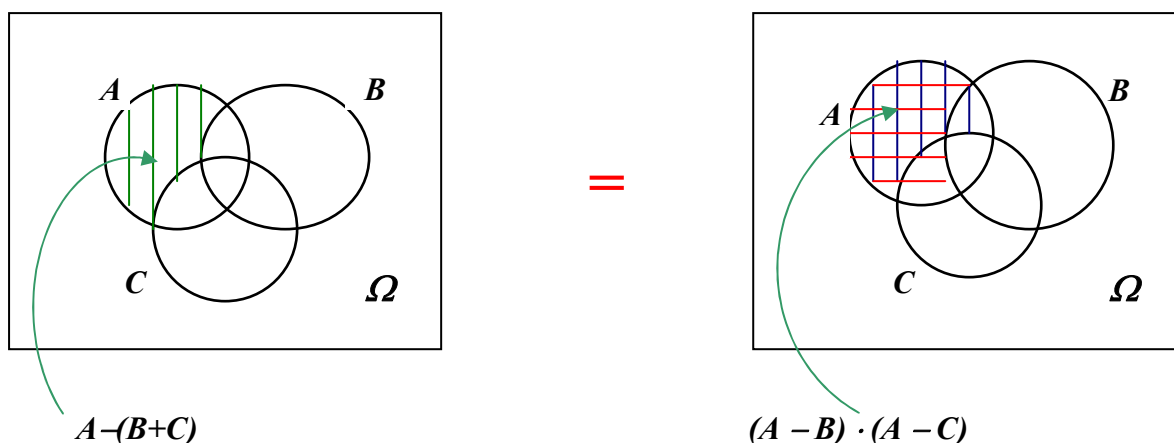
1.  $A + B = B + A$
2.  $A + (B + C) = (A + B) + C$
3.  $A + \emptyset = A$
4.  $A + \Omega = \Omega$
5.  $AB = BA$
6.  $A \cdot (BC) = (AB) \cdot C$
7.  $A \cdot \emptyset = \emptyset$
8.  $A \cdot \Omega = A$
9.  $A + BC = (A + B) \cdot (A + C)$
10.  $A \cdot (B + C) = AB + AC$
11.  $A - BC = (A - B) + (A - C)$
12.  $A - (B + C) = (A - B) \cdot (A - C)$
13.  $A - A = \emptyset$
14.  $A + \bar{A} = \Omega$
15.  $A \cdot \bar{A} = \emptyset$
16.  $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$
17.  $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$

Доказательство равенств можно проводить, используя как диаграммы, так и таблицы значимости.

**Пример 1.** Доказать равенство  $A - (B + C) = (A - B) \cdot (A - C)$ .

**Решение.**

**Способ 1.** Используя диаграммы, отметим штриховкой области наступления событий из левой и правой частей доказываемого равенства, при этом будем считать, что исходные события  $A$ ,  $B$ , и  $C$  совместны в совокупности (то есть возможно их одновременное наступление).



Области наступления событий  $A - (B + C)$  и  $(A - B) \cdot (A - C)$  одинаковы, значит равенство для событий выполняется.

**Способ 2.** Составим таблицы значимости для событий из левой и правой частей доказываемого равенства:

| $A$ | $B$ | $C$ | $B + C$ | $A - (B + C)$ | $A - B$ | $A - C$ | $(A - B) \cdot (A - C)$ |
|-----|-----|-----|---------|---------------|---------|---------|-------------------------|
| 1   | 1   | 1   | 1       | 0             | 0       | 0       | 0                       |
| 1   | 0   | 1   | 1       | 0             | 1       | 0       | 0                       |
| 0   | 1   | 1   | 1       | 0             | 0       | 0       | 0                       |
| 0   | 0   | 1   | 1       | 0             | 0       | 0       | 0                       |
| 1   | 1   | 0   | 1       | 0             | 0       | 1       | 0                       |
| 1   | 0   | 0   | 0       | 1             | 1       | 1       | 1                       |
| 0   | 1   | 0   | 1       | 0             | 0       | 0       | 0                       |
| 0   | 0   | 0   | 0       | 0             | 0       | 0       | 0                       |

Сравнивая построчно выделенные столбцы, приходим к выводу, что рассматриваемые события  $A - (B + C)$  и  $(A - B) \cdot (A - C)$  наступают и не наступают в одних и тех же случаях, следовательно, являются равными.

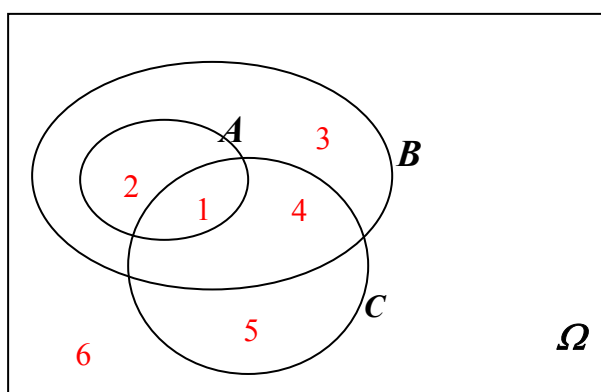
**Пример 2.** Проверить выполнимость равенства

$$AB + C = (B + C) - \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$$

при условиях того, что:  $A$  благоприятно для  $B$ ,  $A$  совместно с  $C$ ,  $B$  совместно с  $C$ .

**Решение.**

Удобнее провести доказательство с помощью таблиц значимости. Но перед заполнением таблицы необходимо представить, как дополнительные условия определяют положение областей наступления событий. Поэтому начнём с построения диаграммы:



Таким образом, при составлении таблиц значимости мы должны учесть тот факт, что наступление события  $A$  обязательно определяет и наступление события  $B$ , то есть ситуации, когда  $A$  наступает, а  $B$  – не наступает, мы из таблицы должны исключить:

| Области<br>на диаграмме | $A$ | $B$ | $C$ | $AB$ | $AB+C$ | $B+C$ | $\bar{A}$ | $\bar{C}$ | $\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$ | $(B+C) - \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$ |
|-------------------------|-----|-----|-----|------|--------|-------|-----------|-----------|---------------------------------|-----------------------------------------|
| 1                       | 1   | 1   | 1   | 1    | 1      | 1     | 0         | 0         | 0                               | 1                                       |
| 2                       | 1   | 1   | 0   | 1    | 1      | 1     | 0         | 1         | 0                               | 1                                       |
| 3                       | 0   | 1   | 0   | 0    | 0      | 1     | 1         | 1         | 1                               | 0                                       |
| 4                       | 0   | 1   | 1   | 0    | 1      | 1     | 1         | 0         | 0                               | 1                                       |
| 5                       | 0   | 0   | 1   | 0    | 1      | 1     | 1         | 0         | 0                               | 1                                       |
| 6                       | 0   | 0   | 0   | 0    | 0      | 0     | 1         | 1         | 0                               | 0                                       |

Сравнивая построчно выделенные столбцы, приходим к выводу, что рассматриваемые события  $AB + C$  и  $(B + C) - \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$  наступают и не наступают в одних и тех же случаях, следовательно, являются равными.

### Задачи для самостоятельного решения

В задачах №№ 1.1 – 1.10 для любых событий  $A, B$  и  $C$  необходимо доказать равенство:

№ 1.1.  $A + BC = (A + B) \cdot (A + C)$ .

№ 1.2.  $AB + C = (A + C) \cdot (B + C)$ .

№ 1.3.  $A \cdot (B + C) = AB + AC$ .

№ 1.4.  $(A + B) \cdot C = AC + BC$ .

№ 1.5.  $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ .

№ 1.6.  $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$ .

№ 1.7.  $A - BC = (A - B) + (A - C)$ .

№ 1.8.  $AB - C = (A - C) \cdot (B - C)$ .

№ 1.9.  $(A + B) - C = (A - C) + (B - C)$ .

№ 1.10.  $\overline{A} \cdot \overline{BC} = (\overline{A + B}) + (\overline{A + C})$ .

В задачах №№ 1.11 – 1.20 необходимо проверить выполнимость равенства при дополнительных условиях на события  $A, B$  и  $C$ :

№ 1.11.  $C - B = (C - A) \cdot \overline{B}$ , если  $A$  благоприятствует  $B$  и  $B$  благоприятствует  $C$ .

№ 1.12.  $A + B = C \cdot (A + B)$ , если  $A$  благоприятствует  $C$ ,  $B$  благоприятствует  $C$ , а события  $A$  и  $B$  совместны.

№ 1.13.  $(A + C) \cdot B = B$ , если  $B$  благоприятствует  $A$ , событие  $C$  совместно с  $A$  и несовместно с  $B$ .

№ 1.14.  $(B + C) \cdot A = A$ , если  $A$  благоприятствует  $B$ ,  $C$  благоприятствует  $B$ , а события  $A$  и  $C$  не совместны.

№ 1.15.  $A + B + C = B$ , если  $A$  благоприятствует  $B$ ,  $C$  благоприятствует  $B$ , и события  $A$  и  $C$  совместны.

№ 1.16.  $A + B + C = B + C$ , если  $A$  благоприятствует  $B$ , а  $C$  не совместно с  $B$ .

№ 1.17.  $A \cdot (B + C) = B + C$ , если  $B$  благоприятствует  $A$ ,  $C$  благоприятствует  $A$  и события  $B$  и  $C$  – несовместны.

**№ 1.18.**  $A + B = A + BC$ , если  $B$  благоприятствует  $C$ , а событие  $A$  совместно с событием  $C$ , но несовместно с  $B$ .

**№ 1.19.**  $(C + B) - A = B - A$ , если  $C$  благоприятствует  $B$ , а событие  $A$  совместно и с событием  $B$ , и с событием  $C$ .

**№ 1.20.**  $(A + B) \cdot (B + C) = B$ , если  $A$  и  $C$  – несовместны, а событие  $B$  совместно и с событием  $A$ , и с событием  $C$ .

## § 2. Классическое определение вероятности

Пусть некоторый опыт имеет  $n$  равновозможных исходов,  $k$  из которых благоприятствуют наступлению события  $A$ . Классической вероятностью события  $A$  называют отношение числа благоприятных для  $A$  исходов к общему числу исходов испытания:

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

Если событие – достоверное, то его вероятность равна 1. Для невозможного события вероятность равна 0. Если же событие  $A$  – случайное, то его вероятность подчиняется условию:

$$0 < P(A) < 1.$$

### Пример.

В коробке находятся 3 белых и 7 чёрных шаров. Наугад из коробки извлекают 3 шара. Какова вероятность того, что среди извлечённых шаров будет только один белый?

### Решение.

Рассмотрим событие  $A$ : «Из трёх извлечённых из коробки шаров – только один белый» и найдём его вероятность, используя формулу классической вероятности. Для этого необходимо знать, сколькими способами может закончиться опыт и в скольких случаях наступит событие  $A$ .

Всего в коробке находится 10 шаров. Опыт состоит в том, что из этих десяти шаров извлекают три. Количество исходов опыта находим по формуле сочетаний:

$$n = C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$$

Благоприятные исходы связаны с наступлением события  $A$ , значит, необходимо знать, сколькими способами формируется выборка из 1 белого и 2 чёрных шаров. Понятно, что белые шары извлекаются из белых, а чёрные – из чёрных, затем полученные значения перемножаются:

$$k = C_3^1 \cdot C_7^2 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 3 \cdot 21 = 63$$

Теперь можно вычислить вероятность события  $A$ :

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{63}{120} = \frac{21}{40} = 0,525$$

**Ответ: 0,525.**

### Задачи для самостоятельного решения

В задачах **№№ 1.21 – 1.30** при решении использовать формулу классической вероятности:

**№ 1.21** Из 50 деталей 5 имеют дефект. Наугад выбирают 3 детали. Какова вероятность того, что среди выбранных деталей только одна будет иметь дефект?

**№ 1.22.** Из 20 предприятий региональный банк кредитовал 8 предприятий. 5 предприятий объявили о банкротстве. Какова вероятность того, что все они брали кредиты в региональном банке?

**№ 1.23.** Из всех возможных двузначных чисел наугад выбирают три числа. Какова вероятность того, что среди выбранных будет только одно чётное число?

- № 1.24.** Какова вероятность того, что при случайной перестановке букв слова ВЕКТОР первые две буквы будут гласными?
- № 1.25.** Какова вероятность того, что при случайной перестановке букв слова МАТЕМАТИКА все буквы А окажутся рядом?
- № 1.26.** Группу из 20 мужчин и 10 женщин произвольным образом делят на две подгруппы по 15 человек в каждой. Какова вероятность того, что все женщины окажутся в одной подгруппе?
- № 1.27.** Из коробки, содержащей 5 белых и 10 чёрных шаров, случайным образом извлекают три шара. Какова вероятность того, что среди извлечённых будет не более двух белых?
- № 1.28.** Из множества всех возможных четырёхзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, наугад выбирают одно. Какова вероятность того, что в выбранном числе две одинаковые цифры не стоят рядом?
- № 1.29.** Какова вероятность того, что из всех возможных трёхзначных чисел случайным образом будет выбрано три числа, каждое из которых делится на 10?
- № 1.30.** Из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составлены четырёхзначные числа, все цифры в записи которых различны. Из этих чисел случайным образом выбирают четыре числа. Какова вероятность того, что среди выбранных чисел будет не более двух чётных чисел?

### § 3. Геометрическое определение вероятности

Если число исходов опыта несчётно, то при вычислении вероятности события применяют формулу геометрической вероятности:

$$P(A) = \frac{\text{мера } g}{\text{мера } G},$$

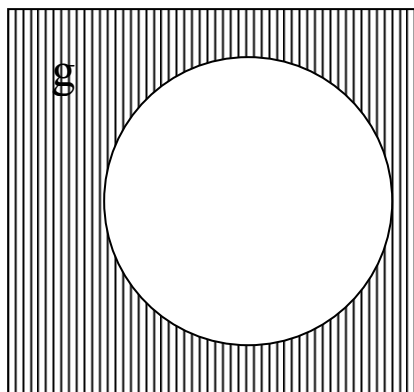
где  $G$  обозначает область осуществления испытания, а  $g$  — область наступления события  $A$ .

**Пример.**

Внутри квадрата со стороной 10 см находится круг радиуса 4 см. Случайным образом с квадрат вбрасывается точка. Какова вероятность того, что точка не попадёт в круг?

**Решение.**

Так как множество точек квадрата несчётно, при решении задачи будет применяться формула геометрической вероятности. Для этого необходимо вычислить меры (площади) области осуществления испытания и области наступления события  $A$ : «Точка, брошенная в квадрат, не попадает в круг».



Мерой области осуществления испытания является площадь квадрата:

$$\text{мера } G = 10^2 = 100 \text{ ( кв.см)}$$

Область наступления события отмечена штриховкой, её меру можно найти вычитанием из площади квадрата площадь круга:

$$\text{мера } g = 100 - \pi \cdot 4^2 = 100 - 16\pi \text{ (кв.см)}$$

Теперь может быть вычислена вероятность события  $A$ :

$$P(A) = \frac{\text{мера } g}{\text{мера } G} = \frac{100 - 16\pi}{100} = 1 - 0,16\pi \approx 1 - 0,503 = 0,497.$$

**Ответ: 0,497.**

**Задачи для самостоятельного решения**

В задачах **№№ 1.31 – 1.40** при решении использовать формулу геометрической вероятности:

- № 1.31.** На отрезок длиной 10 см наугад брошена точка. Какова вероятность того, что она окажется на далее 1 см от середины отрезка?
- № 1.32.** На отрезок длиной 10 см наугад брошена точка. Какова вероятность того, что она окажется удалённой от концов отрезка больше, чем на 1 см?
- № 1.33.** Внутри квадрата со стороной 10 см расположен круг радиуса 2 см. Какова вероятность того, что точка, наугад брошенная в квадрат, не попадёт в круг?
- № 1.34.** В круг радиуса 5 см вписан квадрат, и в этот квадрат вписан ещё один круг. Какова вероятность того, что брошенная наугад в большой круг точка попадёт и в малый?
- № 1.35.** В квадрат со стороной 10 см вписан круг, а в круг вписан правильный треугольник. Случайным образом в квадрат вбрасывается точка. Какова вероятность того, что эта точка не попадёт в треугольник?
- № 1.36.** Мишень образована пятью концентрическими окружностями радиусов 2 см, 4 см, 6 см, 8 см и 10 см. Какова вероятность того, что при одном выстреле по мишени не попадут в самый маленький круг? Какова вероятность того, что местом попадания при одном выстреле будет внешнее кольцо (границами являются окружности радиусами 8 см и 10 см)?
- № 1.37.** На плоскости проведены параллельные прямые, расстояние между которыми равно 12 см. Какова вероятность того, что брошенный наугад на эту плоскость круг радиуса 5 см не будет пересечён ни одной из этих прямых.
- № 1.38.** На плоскости расположены параллельные прямые, расстояния между которыми чередуются и равно 1,5 см и 8 см. Какова вероятность того, что брошенный на эту плоскость круг радиуса 2,5 см не будет пересечён ни одной из этих прямых.
- № 1.39.** Два друга договорились о встрече в период от 10-00 до 10-15, пришедший на эту встречу первым ждёт другого не более 5 минут, после чего уходит. Считая, что приход каждого из участников встречи возможен в

любой момент указанного промежутка, найти вероятность того, что встреча состоится.

**№ 1.40.** В квадратном уравнении  $x^2 + px + q = 0$  коэффициенты  $p$  и  $q$  выбираются произвольным образом в интервале  $(0; 1)$ . Какова вероятность того, что при выбранных коэффициентах данное уравнение будет иметь действительные корни?

#### § 4. Основные правила вычисления вероятностей

При решении задач, связанных с вычислениями вероятностей событий, весьма полезными будут следующие правила.

**Правило 1.** Если события  $A$  и  $B$  несовместны, то вероятность суммы событий  $A + B$  равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Это утверждение обобщается на любое количество попарно несовместных событий:

**Правило 2.**

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n),$$

$$\text{если } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ при } i \neq j.$$

##### Пример 1.

Из коробки, содержащей 5 красных, 3 зелёных и 2 белых шара, извлекают один. Какова вероятность того, что извлечённый шар не будет белым?

##### Решение.

Событие из вопроса задачи «Извлечённый шар не будет белым» может быть заменено эквивалентным событием «Извлечённый шар – красный или зелёный», что представляет собой сумму попарно несовместных событий  $A$ : «Извлечённый шар – красный» и  $B$ : «Извлечённый шар – зелёный», поэтому для ответа на вопрос задачи применим Правило 1:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10} = 0,8$$

**Ответ: 0,8.**

Поскольку события  $A$  и  $\bar{A}$  попарно несовместны, а в сумме дают достоверное событие, то имеют место и следующие равенства:

**Правило 3.**  $P(A + \bar{A}) = 1$

**Правило 4.**  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

**Правило 5.**  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

В рассмотренном примере можно ввести событие  $A$ : «Извлечённый шар – белый», тогда событие из вопроса задачи «Извлечённый шар не будет белым» представляет собой противоположное событие  $\bar{A}$ , вероятность которого можно найти, используя Правило 5:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{10} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

Попарно несовместные события, сумма которых образует всё пространство событий, называют *полной группой испытания*.

Если события  $H_1, H_2, \dots, H_n$  образуют полную группу испытания, то для них всегда выполнены условия:

1.  $H_i \cap H_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ ,
2.  $H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega$
3.  $P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1$

Например, если опыт состоит в однократном подбрасывании кубика, то полная группа испытания может формироваться по-разному. Шесть событий, связанных с выпадением 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков образуют полную группу, как и всего для события «Выпало чётное число очков» и «Выпало нечётное число очков». В первом случае события являются элементарными исходами опыта, во втором – составными событиями. Но и в первом, и во втором случае выполнены все условия, необходимые для формирования полной группы испытания:

попарная несовместность событий (условие 1), в сумме дающих всё пространство событий (условие 2), и сумма вероятностей которых равна 1 (условие 3).

Если вероятность события  $A$  вычисляется при условии наступления события  $B$ , то такую вероятность называют **условной** и обозначают:  $P(A|B)$  или  $P_B(A)$ .

### **Правило 6.**

Вероятность произведения двух событий вычисляют по формуле:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Это правило обобщается на любое количество множителей:

### **Правило 7.**

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_{n-1} \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1})$$

### **Пример 2.**

Из коробки, содержащей 5 красных и 3 зелёных шара, последовательно без возвращения извлекают два шара. Какова вероятность того, что извлечены разноцветные шары?

### **Решение.**

Можно рассмотреть событие из вопроса задачи  $A$ : «Извлечены разноцветные шары» как результат действий с более простыми событиями, моделирующими опыт, связанный с формированием выборки без возвращения:  $A = I_K \cdot II_3 + I_3 \cdot II_K$ , где, например,  $I_K$  определяет событие «Первым извлекли красный шар». При решении задачи надо учитывать, что при извлечении второго шара общее количество шаров в коробке уменьшается на один (первый извлечённый шар в коробку не возвращается):

$$\begin{aligned} A &= I_K \cdot II_3 + I_3 \cdot II_K \Rightarrow \\ P(A) &= \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28} = 0,5357 \end{aligned}$$

### **Ответ: 0,5357.**

Задача **Примера 2** могла быть решена и с применением формулы классической вероятности, однако, в приведённом примере показано, какое влия-

ние на решение оказывает условие формирования выборки. Мы должны прийти к выводу, что выборка без возвращения формирует зависимые события, и при решении задачи в таких условиях необходимо использовать условные вероятности.

Если условные и безусловные вероятности событий совпадают, то события определяются как **независимые**:

$$P(A) = P(A|B) \text{ и } P(B) = P(B|A).$$

Можно сказать, что для независимых событий наступление одного события не изменяет вероятности наступления другого.

Правила 6 и 7 для **независимых** событий примут вид:

**Правило 8.**  $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

**Правило 9.**  $P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$

В последнем случае события должны быть независимыми в совокупности: наступление какого-либо из них не изменяет вероятности наступления оставшихся событий, а также любых их произведений.

### **Пример 3.**

Предприятие оформило кредиты в трёх разных банках, оценив вероятность возврата кредита первому банку в 0,8, второму – в 0,9 и третьему – 0,7. Какова вероятность того, что предприятие вернёт все взятые кредиты? Какова вероятность того, что предприятие вернёт только один из взятых кредитов?

### **Решение.**

В условии задачи нет указаний на то, что вероятность возврата кредита одному банку как-то связана с вероятностью возврата кредита другому банку, то есть события  $A_1$ : «Предприятие вернуло кредит первому банку»,  $A_2$ : «Предприятие вернуло кредит второму банку»,  $A_3$ : «Предприятие вернуло кредит третьему банку» **являются независимыми**. На основе этих событий можно описывать события из вопроса задачи.

Событие  $A$ : «Предприятие вернёт все взятые кредиты» равно произведению событий  $A_1, A_2, A_3$ . Поэтому вероятность события  $A$  вычислим с применением **Правила 9**:

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,7 = 0,504.$$

Событие  $B$ : «Предприятие вернёт только один из взятых кредитов» может быть представлено как

$$B = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3.$$

При вычислении вероятности события  $B$  применяем **Правила 2, 5 и 9**:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3) = \\ &= P(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3) = \\ &= 0,8 \cdot (1 - 0,9) \cdot (1 - 0,7) + (1 - 0,8) \cdot 0,9 \cdot (1 - 0,7) + (1 - 0,8) \cdot (1 - 0,9) \cdot 0,7 = \\ &= 0,8 \cdot 0,1 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,9 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,7 = \\ &= 0,092. \end{aligned}$$

**Ответ: 0,504; 0,092.**

Если событие  $A$  может наступить только с одним из событий  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , образующих полную группу испытания, то вероятность наступления события  $A$  вычисляют по **формуле полной вероятности**:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)$$

События  $H_1, H_2, \dots, H_n$  называют априорными гипотезами.

Если событие  $A$  уже наступило, то становится понятным, вместе с каким из событий  $H_1, H_2, \dots, H_n$  это произошло. В этом случае соответствующая гипотеза, обеспечившая наступление события  $A$ , называется апостериорной, и её вероятность может быть переоценена по **формуле Байеса**:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)}$$

В знаменателе – полная вероятность события  $A$ .

#### **Пример 4.**

Три эксперта составили списки предприятий с нарушениями в финансовой отчётности. В списке, составленном первым экспертом, 4 предприятия, вторым – 5 предприятий и третьим – 2 предприятия. Для проведения повторной проверки наугад выбирается список и из него наугад выбирается предприятие. Какова вероятность того, что предприятие для повторной проверки было выбрано из списка, составленного третьим экспертом?

#### **Решение.**

Так как список выбирается наугад, необходимо выдвинуть гипотезы:

$H_1$ : «Выбран список, составленный первым экспертом»,

$H_2$ : «Выбран список, составленный вторым экспертом»,

$H_3$ : «Выбран список, составленный третьим экспертом»,

которые равновероятны:  $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$ , и после этого рассуждать о вероятности выбора одного предприятия из соответствующего списка. Тогда вероятность события  $A$ : «Для повторной проверки будет выбрано одно предприятие» вычисляется по формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 5}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{38}{120} = \frac{19}{60} = 0,3167. \end{aligned}$$

Для ответа на вопрос задачи необходимо переоценить вероятность третьей гипотезы. Для этого используем формулу Байеса:

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{38}{120}} = \frac{120}{6 \cdot 38} = \frac{120}{228} = \frac{10}{19} = 0,5263$$

**Ответ: 0,5263.**

#### **Пример 5.**

В трёх списках, представленных экспертами, содержится перечень проверенных предприятий. В списке из 10 предприятий, проверенных первым экспертом, два имеют нарушения в финансовой отчётности, во втором списке из 8

предприятий нарушения отчётности отмечены у трёх предприятий, а из 12 предприятий, проверенных третьим экспертом, нарушения выявлены у 5 предприятий. Из каждого списка наугад выбирают одно предприятие и затем из них выбирают одно для повторной проверки. Какова вероятность того, что в результате будет выбрано предприятие, не имеющее нарушений в финансовой отчётности?

**Решение.**

Так как не известно, какая тройка предприятий по одному из каждого списка будет выбрана, необходимо выдвижение следующих гипотез:

$H_1$ : «Все три выбранных из соответствующих списков предприятия имеют нарушения в финансовой отчётности».

$H_2$ : «Все три выбранных из соответствующих списков предприятия не имеют нарушений в финансовой отчётности».

$H_3$ : «Только одно из трёх выбранных из соответствующих списков предприятий имеет нарушения в финансовой отчётности».

$H_4$ : «Только одно из трёх выбранных из соответствующих списков предприятий не имеет нарушений в финансовой отчётности».

Вероятности гипотез вычисляем с применением формулы классической вероятности, а также Правил 2, 5 и 9:

$$P(H_1) = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{12} = \frac{30}{960} = \frac{1}{32},$$

$$P(H_2) = \frac{8}{10} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{12} = \frac{280}{960} = \frac{7}{24},$$

$$P(H_3) = \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{12} + \frac{8}{10} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{7}{12} + \frac{8}{10} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{12} = \frac{438}{960} = \frac{73}{160},$$

$$P(H_4) = \frac{8}{10} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{12} + \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{12} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{7}{12} = \frac{212}{960} = \frac{53}{240}.$$

Вероятность события  $A$ : «Предприятие, выбранное одно из трёх, не будет иметь нарушений в финансовой отчётности» вычисляем по формуле полной вероятности в присутствии четырёх гипотез:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3) + P(H_4) \cdot P(A|H_4) =$$

$$= \frac{1}{32} \cdot \frac{0}{3} + \frac{7}{24} \cdot \frac{3}{3} + \frac{73}{160} \cdot \frac{2}{3} + \frac{53}{240} \cdot \frac{1}{3} = \frac{0 + 840 + 876 + 212}{2880} = \frac{1928}{2880} = \frac{241}{360} = 0,6694$$

**Ответ: 0,6694.**

### **Задачи для самостоятельного решения**

В задачах **№№ 1.41 – 1.60** при решении использовать формулы для вычисления вероятностей суммы или произведения событий:

**№ 1.41.** Вероятность успешного завершения первого проекта равна 0,8, второго – 0,9 и третьего – 0,95. Найти вероятность того, что из трёх проектов успешно завершится только один.

**№ 1.42.** Чтобы принять партию готовых изделий, используют выборочный контроль: берут 5 изделий и если среди них окажется хотя бы одно бракованное, то бракуется и вся партия. Вероятность выпуска бракованного изделия равна 0,01. Найти вероятность того, что проверяемая партия изделий будет забракована.

**№ 1.43.** Имеются 3 коробки, в каждой из которых находятся по 3 белых и 2 чёрных шара. Из каждой коробки наугад выбирают по одному шару. Какова вероятность того, что среди выбранных шаров будет хотя бы один белый шар?

**№ 1.44.** Вероятность попадания по мишени при одном выстреле равна 0,7. Сколько раз надо выстрелить по мишени, чтобы вероятность хотя бы одного попадания была  $\geq 0,9$ ?

**№ 1.45.** Вероятность хотя бы одного попадания по мишени при 10 выстрелах равна 0,7. Какова вероятность попадания по мишени при одном выстреле, если она не меняется от выстрела к выстрелу?

**№ 1.46.** В коробке находятся 1 белый и 5 чёрных шаров. Два игрока по очереди извлекают из коробки по одному шару. Выигрывает тот, кто первым из-

влечёт белый шар. Какова вероятность выигрыша того игрока, который начинает игру первым? При решении задачи рассмотреть случай, когда извлечённый игроком шар возвращается в коробку, и случай, когда извлечённый шар в коробку не возвращается.

**№ 1.47.** Игра продолжается до тех пор, пока на заданный вопрос дают правильный ответ. Вероятность правильного ответа на один вопрос равна 0,1 и не меняется от вопроса к вопросу. Какова вероятность того, что в процессе игры будет задано не более 10 вопросов?

**№ 1.48.** На шахматную доску наугад ставят две ладьи. Вычислить вероятность того, что ладьи побьют друг друга при условии, что их поставили на клетки разного цвета.

**№ 1.49.** Из натуральных чисел от 1 до 100 случайным образом выбирают три числа. Какова вероятность того, что третье число попадёт в интервал, образованный первым и вторым числом при условии, что первое число меньше второго?

**№ 1.50.** Известно, что  $P(A) = 0,7$ ,  $P(B) = 0,6$ ,  $P(AB) = 0,5$ . Найти  $P(A + B)$  и  $P(\overline{A} + \overline{B})$ .

**№ 1.51.** Известно, что события  $A$ ,  $B$  и  $C$  являются независимыми и  $P(A) = 0,4$ ,  $P(B) = 0,6$ ,  $P(C) = 0,5$ . Найти  $P(AB + \overline{C})$ .

**№ 1.52.** Известно, что события  $A$ ,  $B$  и  $C$  являются независимыми и  $P(A) = 0,8$ ,  $P(B) = 0,5$ ,  $P(C) = 0,4$ . Найти  $P((A + B) \cdot (A + C))$ .

**№ 1.53.** Известно, что события  $A$ ,  $B$  и  $C$  являются независимыми и  $P(A) = 0,3$ ,  $P(B) = 0,4$ ,  $P(C) = 0,5$ . Найти  $P((A + B + C) \cdot (\overline{A} + C))$ .

**№ 1.54.** Известно, что события  $A$ ,  $B$  и  $C$  являются независимыми и  $P(A) = 0,9$ ,  $P(B) = 0,5$ ,  $P(C) = 0,6$ . Найти  $P((AB + BC) \cdot (AC))$ .

**№ 1.55.** Известно, что события  $A$ ,  $B$  и  $C$  являются независимыми и  $P(A) = 0,7$ ,  $P(B) = 0,6$ ,  $P(C) = 0,5$ . Найти  $P((A \cdot \overline{B} + BC) \cdot (A \cdot \overline{C}))$ .

**№ 1.56.** Известно, что события  $A$ ,  $B$  и  $C$  являются независимыми и  $P(A) = 0,4$ ,

$$P(B) = 0,6, P(C) = 0,5. \text{ Найти } P(AB + \bar{C} | AC).$$

**№ 1.57.** Известно, что события  $A$ ,  $B$  и  $C$  являются независимыми и  $P(A) = 0,8$ ,

$$P(B) = 0,5, P(C) = 0,4. \text{ Найти } P((A + B) | (A + C)).$$

**№ 1.58.** Известно, что события  $A$ ,  $B$  и  $C$  являются независимыми и  $P(A) = 0,3$ ,

$$P(B) = 0,4, P(C) = 0,5. \text{ Найти } P((A + B + C) | (\bar{A} + C)).$$

**№ 1.59** Известно, что события  $A$ ,  $B$  и  $C$  являются независимыми и  $P(A) = 0,9$ ,

$$P(B) = 0,5, P(C) = 0,6. \text{ Найти } P((AB + BC) | (AC)).$$

**№ 1.60.** Известно, что события  $A$ ,  $B$  и  $C$  являются независимыми и  $P(A) = 0,7$ ,

$$P(B) = 0,6, P(C) = 0,5. \text{ Найти } P((A \cdot \bar{B} + BC) | (A \cdot \bar{C})).$$

В задачах **№№ 1.61 – 1.80** при решении использовать формулу полной вероятности или формулу Байеса:

**№ 1.61.** Имеются две коробки. В первой содержится 2 белых и 5 чёрных шаров, во второй – 3 белых и 1 чёрный. Из первой коробки извлекают один шар и перекладывают во вторую, после чего из второй коробки извлекают 1 шар. Какова вероятность того, что извлечённый из второй коробки шар окажется чёрным?

**№ 1.62.** Имеются три коробки. В первой находятся 2 белых и 3 чёрных шара, во второй – 1 белый и 2 чёрных, в третьей – 1 белый и 3 чёрных. Из первой коробки извлекли один шар и переложили во вторую, затем из второй коробки извлекли один шар и переложили в третью. После этого из третьей коробки извлекают 1 шар. Какова вероятность того, что этот извлечённый из третьей коробки шар окажется белым?

**№ 1.63** Имеются две коробки. В первой содержится 5 белых и 5 чёрных шаров, во второй – 3 белых и 3 чёрных. Из первой коробки извлекают два шара и перекладывают во вторую, после чего из второй коробки извлекают 1 шар. Какова вероятность того, что этот извлечённый из второй коробки шар окажется чёрным?

- № 1.64.** Имеются две коробки. В первой содержится 5 белых и 8 чёрных шаров, во второй – 3 белых и 5 чёрных. Из первой коробки извлекают три шара и перекладывают во вторую, после чего из второй коробки извлекают 1 шар. Какова вероятность того, что этот извлечённый из второй коробки шар окажется белым?
- № 1.65.** Имеются три одинаковых коробки. В первой находятся 2 белых и 3 чёрных шара, во второй – 1 белый и 2 чёрных, в третьей – 1 белый и 3 чёрных. Наугад выбирают коробку и затем из выбранной коробки наугад извлекают 1 шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется чёрным?
- № 1.66.** Имеются три одинаковых коробки. В первой находятся 10 белых и 2 чёрных шара, во второй – 1 белый и 11 чёрных, в третьей – 3 белых и 9 чёрных. Из каждой коробки наугад выбирают по одному шару и затем из выбранных трёх шаров наугад выбирают один. Какова вероятность того, что этот выбранный шар окажется белым?
- № 1.67.** Имеются три одинаковых коробки. В первой находятся 10 белых и 2 чёрных шара, во второй – 1 белый и 11 чёрных, в третьей – 3 белых и 9 чёрных. Из каждой коробки наугад выбирают по два шара и затем из выбранных шести шаров наугад выбирают два. Какова вероятность того, что эти два выбранных шара окажутся разноцветными?
- № 1.68.** В коробку, содержащую 5 шаров, бросили 1 белый шар, после чего наугад извлекли 1 шар. Вычислить вероятность того, что извлечённый шар окажется белым, если равновероятны все возможные предположения о первоначальном количестве белых шаров в коробке.
- № 1.69.** Каждая буква слова ВЕКТОР написана на отдельной карточке. Две карточки потеряны. Из оставшихся карточек наугад извлекается одна. Какова вероятность того, что на извлечённой карточке будет написана гласная буква?
- № 1.70.** Имеется три одинаковых коробки. В первой находятся 10 белых шаров, во второй – 10 чёрных, в третьей – 5 белых и 5 чёрных. Коробку выбирают, подбрасывая кубик 1 раз. Если выпадет 6 очков, то выбирают первую

коробку, если выпадет 1 очко, то выбирают вторую коробку, во всех других случаях должна быть выбрана третья коробка. Из выбранной коробки извлекают 1 шар. Какова вероятность того, что он окажется белым?

**№ 1.71.** Детали могут быть обработаны тремя автоматами. Первый автомат обрабатывает 30% выпускаемой продукции, второй – 40%, остальную часть обрабатывает третий автомат. Вероятность выпуска бракованной детали для первого автомата равна 0,01, для второго – 0,03 и для третьего – 0,01. Выбранная для контроля деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что её обрабатывали на втором автомате?

**№ 1.72.** За потребительским кредитом клиент может обратиться в первый банк с вероятностью 0,8, а во второй банк – с вероятностью 0,2. Вероятность отказа в получении кредита в первом банке составляет 0,4, во втором – 0,7. Обратившись в банк, клиент получил кредит. Какова вероятность того, что этот кредит был получен во втором банке?

**№ 1.73.** Из 25 студентов десять выучили все 50 вопросов к экзамену, 10 студентов выучили 30 вопросов, а 5 студентов выучили только 10 вопросов. Выбранный случайным образом студент на экзамене ответил на вопрос. Какова вероятность того, что этот студент выучил к экзамену только 10 вопросов?

**№ 1.74.** Из пяти монет одна является бракованной – на ней герб отпечатан с двух сторон. Наугад выбранную монету, не разглядывая, подбрасывают пять раз, и она пять раз падает гербом вверх. Какова вероятность того, что в руках у подбрасывающего была обычная, а не бракованная монета?

**№ 1.75.** 95% выпускаемых изделий являются изделиями высшего сорта, остальные – первого сорта. Система контроля качества признаёт изделие высшего сорта изделием высшего сорта с вероятностью 0,99, а изделие первого сорта изделием высшего сорта с вероятностью 0,02. Изделие при проведении контроля было признано изделием высшего сорта. Какова вероятность того, что оно является изделием первого сорта?

- № 1.76.** На складе хранится продукция трёх производителей в отношении 2:3:5. Процент брака в выпускаемой продукции у первого производителя составляет 5%, у второго – 2%, у третьего – 1%. Случайным образом выбранная со склада продукция оказалась без брака. Что более вероятно: эта продукция второго производителя или третьего?
- № 1.77.** Банк разделил своих клиентов в отношении 1:8. Вероятность нарушения сроков погашения кредита для клиентов первой группы равна 0,3, а для клиентов второй группы – 0,01. Случайным образом выбранный клиент нарушил срок погашения кредита. Какова вероятность того, что он принадлежит второй группе?
- № 1.78.** Вероятность попадания по мишени для каждого из пяти стрелков первой группы равна 0,6, а вероятность попадания по мишени для каждого из трёх стрелков второй группы равна 0,9. Случайным образом выбранный стрелок попал по мишени. Какова вероятность того, что он из первой группы?
- № 1.79.** В группе 5 отличников, 15 хорошо успевающих студентов и 5 студентов, занимающихся слабо. На предстоящем экзамене отличники могут получать только оценку «отлично», хорошо успевающие студенты с равной вероятностью могут получать оценки «отлично» или «хорошо», а слабо успевающие студенты с равной вероятностью могут получать оценки «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно». Наугад выбранный студент получил на экзамене оценку «хорошо». Какова вероятность того, что он – слабо успевающий студент?
- № 1.80.** Каждое из трёх любимых мест для рыбалки рыболов выбирает с равной вероятностью. На первом месте при однократном забрасывании удочки рыба клюёт с вероятностью 0,6, на втором месте – с вероятностью 0,8, а на третьем – 0,5. Выйдя в очередной раз на рыбалку, рыболов трижды закидывал удочку, но рыба клюнула только один раз. Какова вероятность того, что рыбачил рыболов на втором месте?

## § 5. Повторные независимые испытания.

Говорят, что серия из  $n$  испытаний проходит по *схеме Бернулли*, если выполнены условия:

- эти испытания независимы,
- каждое из них имеет только два исхода ( $A$  наступило или  $A$  не наступило),
- вероятность наступления события  $A$  в каждом испытании одна и та же и равна  $p = P(A)$ .

Наступление события  $A$  принято называть «успехом». «Неуспех» связан с тем, что событие  $A$  не наступило,  $P(\bar{A}) = 1 - p = q$ .

Если испытания проходят по схеме Бернулли, то вероятность  $k$  «успехов» при  $n$  испытаниях вычисляют по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

$$\text{здесь } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad p = P(A), \quad q = 1 - p.$$

### Пример 1.

Испытываются пять независимо работающих одинаковых прибора. Вероятность отказа в работе для каждого прибора равна 0,2. Найти вероятность того, что в результате проводящихся испытаний откажет только один прибор.

### Решение.

Испытания проходят по схеме Бернулли: они независимы и вероятность отказа остаётся неизменной от опыта к опыту, поэтому ответ на вопрос задачи найдём по формуле Бернулли при  $n = 5$ ,  $k = 1$ ,  $p = 0,2$  и  $q = 1 - 0,2 = 0,8$ :

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^{5-1} = 5 \cdot 0,2 \cdot 0,4096 = 0,4096.$$

Ответ: 0,4096.

Понятно, что для различных значений  $k$  соответствующие вероятности  $P_n(k)$ , вообще говоря, различны. Однако, наиболее вероятное количество «успехов»  $k_0$  всегда подчиняется неравенству:

$$np + p - 1 \leq k_0 \leq np + p.$$

### **Пример 2.**

Вероятность наступления события  $A$  в каждом из девяти независимых испытаний равна 0,5. Найти наиболее вероятное число наступлений события  $A$ .

### **Решение.**

Можно, используя формулу Бернулли, вычислить вероятности  $P_n(k)$  для  $n = 9$  и значений  $k$  от 0 до 9, затем выбрать то  $k_0$ , которому соответствует наибольшая вероятность. Но удобнее сразу использовать оценочное неравенство:

$$9 \cdot 0,5 + 0,5 - 1 \leq k_0 \leq 9 \cdot 0,5 + 0,5$$

$$4 \leq k_0 \leq 5$$

Таким образом, наибольшая вероятность отвечает двум значениям  $k_0 = 4$  и  $k_0 = 5$ , для всех других значений  $k$  соответствующая вероятность  $P_9(k)$  будет меньше.

**Ответ:**  $k_0 = 4, k_0 = 5$ .

Можно заметить, что если верхняя граница  $np + p$  в неравенстве получается дробным числом, то наиболее вероятное число «успехов»  $k_0$  определится как единственное.

При больших значениях  $n$  вычисления по формуле Бернулли весьма затруднительны, поэтому для решения задач используют приближённые формулы. Различают локальную формулу Муавра-Лапласа, интегральную формулу Лапласа и приближённую формулу Пуассона. Последнюю применяют в тех случаях, когда  $n \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 0$ , то есть в тех случаях, когда «успех» представляет собой *очень редкое событие*. В этом случае произведение  $np^2$  должно быть значительно меньше 1. Однако при решении задач допустимо использовать оценку произведения  $npq$ , которое должно быть значительно меньше 10.

**Локальная приближённая формула Муавра-Лапласа** имеет вид:

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}},$$

где  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  - функция Гаусса, значения которой табулированы (Приложение 1) для различных значений аргумента  $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ .

Из полезных для решения задач отметим следующие свойства функции  $\varphi(x)$ :

1.  $\varphi(-x) = \varphi(x)$  - функция Гаусса является чётной.
2.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = 0$ .

**Интегральная приближённая формула Лапласа** имеет вид:

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  - функция Лапласа, значения которой табулированы

(Приложение 2), а аргументы вычисляют по формулам:

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Из полезных для решения задач отметим следующие свойства функции  $\Phi(x)$ :

1.  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$  - функция Лапласа является нечётной.
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0,5$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = -0,5$ .

**Приближённая формула Пуассона** имеет вид:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},$$

где  $\lambda = np$  и определяет среднее число «успехов» в серии из  $n$  испытаний, проходящих по схеме Бернулли. Для вероятностей  $P_n(k)$  при разных значениях  $\lambda$  и  $k$  также составлены таблицы (Приложение 3).

### Пример 3.

Известно, что среди выпускаемых изделий изделия первого сорта составляют 20%, остальные – высшего сорта. Какова вероятность того, что из 400 проверенных изделий 60 будут изделиями первого сорта?

### Решение.

Вероятность события  $A$ : «Проверяемое изделие окажется изделием первого сорта» ( $P(A) = \frac{20}{100} = 0,2$ ) остаётся постоянной в серии из 400 независимых испытаний. Поэтому имеет место схема испытаний Бернулли. Однако  $n = 400$  достаточно велико, и использование формулы Бернулли для вычисления  $P_{400}(60)$  затруднительно, поэтому необходимо применить одну из приближённых формул. Для выбора нужной формулы оценим произведение  $npq$ :

$$npq = 400 \cdot 0,2 \cdot (1 - 0,2) = 400 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 64 > 10$$

Из полученной оценки понятно, что для решения задачи должна быть применена локальная приближённая формула Муавра-Лапласа

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$$

при  $n = 400$  и  $k = 60$ .

Вычислим аргумент для функции Гаусса:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{60 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = \frac{60 - 80}{\sqrt{64}} = -\frac{20}{8} = -2,5$$

Теперь найдём ответ на вопрос задачи:

$$P_{400}(60) \approx \frac{\varphi(-2,5)}{\sqrt{64}} = \frac{\varphi(2,5)}{8} = \frac{0,0175}{8} = 0,00219$$

При вычислениях использовано свойство чётности функции Гаусса и её табличное значение для аргумента  $x = 2,5$ .

**Ответ:**  $P_{400}(60) \approx 0,00219$ .

#### **Пример 4.**

Вероятность выхода из строя для приборов определённого типа составляет 0,001. Найти вероятность того, что из 2000 проверяемых приборов выйдут из строя только 2 прибора.

#### **Решение.**

Вероятность события  $A$ : «Проверяемый прибор выйдет из строя» ( $P(A) = 0,001$ ) остаётся постоянной в серии из 2000 независимых испытаний. Поэтому имеет место схема испытаний Бернулли. Но  $n = 2000$  очень велико, и формула Бернулли в данном случае не применяется, необходимо применить одну из приближённых формул. Для выбора нужной формулы оценим произведение  $npq$ :

$$npq = 2000 \cdot 0,001 \cdot (1 - 0,001) = 2000 \cdot 0,001 \cdot 0,999 = 1,998 \ll 10$$

$$(\text{Точнее: } np^2 = 2000 \cdot 0,001^2 = 0,002 \ll 1)$$

Из полученной оценки понятно, что для решения задачи должна быть применена приближённая формула Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

при  $n = 2000$ ,  $k = 2$  и  $\lambda = np = 2000 \cdot 0,001 = 2$ :

$$P_{2000}(2) \approx \frac{2^2}{2!} \cdot e^{-2} = 0,2707$$

Мы использовали таблицу значений для  $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$  при  $k = 2$  и  $\lambda = np = 2$ .

**Ответ:**  $P_{2000}(2) \approx 0,2707$ .

#### **Пример 5.**

Известно, что среди выпускаемых изделий изделия первого сорта составляют 20%, остальные – высшего сорта. Какова вероятность того, что из 400 проверенных изделий не менее 50, но и не более 90 окажутся изделиями первого сорта ?

### Решение.

Вероятность события  $A$ : «Проверяемое изделие окажется изделием первого сорта» ( $P(A) = \frac{20}{100} = 0,2$ ) остаётся постоянной в серии из 400 независимых испытаний. Поэтому имеет место схема испытаний Бернулли. Однако при  $n = 400$  формула Бернулли не используется. В Примере 1 мы уже оценили произведение  $npq = 400 \cdot 0,2 \cdot (1 - 0,2) = 64 > 10$  и пришли к выводу, что для решения задачи должна быть применена приближённая формула Лапласа. В случае рассматриваемого примера – это интегральная формула Лапласа

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

так как число «успехов» должно быть заключено в интервале от 50 до 90:

$$P_{400}(50 \leq k \leq 90) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

Вычислим соответствующие значения аргументов для функции Лапласа:

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{64}} = 1,25,$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{64}} = -3,75.$$

Теперь найдём ответ на вопрос задачи:

$$\begin{aligned} P_{400}(50 \leq k \leq 90) &\approx \Phi(1,25) - \Phi(-3,75) = \Phi(1,25) + \Phi(3,75) = 0,39435 + 0,49991 = \\ &= 0,89426 \end{aligned}$$

При вычислениях было использовано свойство нечётности функции Лапласа и её табличные значения для аргументов 1,25 и 3,75.

**Ответ:**  $P_{400}(50 \leq k \leq 90) \approx 0,89426$ .

### Пример 6.

Вероятность выхода из строя для приборов определённого типа составляет 0,001. Найти вероятность того, что из 2000 проверяемых приборов выйдут из строя более двух приборов.

### Решение.

В Примере 4 мы уже обосновали необходимость применения приближённой формулы Пуассона, опираясь на оценку произведения  $npq$ :

$$npq = 2000 \cdot 0,001 \cdot (1 - 0,001) = 2000 \cdot 0,001 \cdot 0,999 = 1,998 \ll 10 \quad (\text{Точнее:}$$

$$np^2 = 2000 \cdot 0,001^2 = 0,002 \ll 1).$$

Поэтому просто найдём ответ на вопрос задачи:

$$\begin{aligned} P_{2000}(2 < k \leq 2000) &\approx 1 - (P_{2000}(0) + P_{2000}(1) + P_{2000}(2)) = \\ &= 1 - (0,1353 + 0,2707 + 0,2707) = 0,3233. \end{aligned}$$

При этом мы использовали табличные значения для  $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$  при

$$\lambda = np = 2000 \cdot 0,001 = 2 \text{ и } k = 0, k = 1, k = 2.$$

Ответ:  $P_{2000}(2 < k \leq 2000) \approx 0,3233$ .

### **Задачи для самостоятельного решения**

В задачах **№№ 1.81 – 1.100** при решении использовать формулу Бернулли или приближённые формулы:

**№ 1.81.** Тест состоит из 5 вопросов, на каждый вопрос приведено 4 ответа, из которых только один является правильным. Студент выбирает ответы наугад. Какова вероятность того, что он правильно ответит только на 3 вопроса? Какова вероятность того, что студент правильно ответит на все вопросы?

**№ 1.82.** В горном районе работают 4 сейсмологические станции, вероятность выхода из строя в течение года для каждой из них равна 0,2. Какова вероятность того, что в течение года из строя выйдет только одна станция? Какова вероятность того, что в течение года из строя выйдет хотя бы одна станция?

- № 1.83.** Какова вероятность того, что в многодетной семье из 8 детей будет 7 мальчиков и 1 девочка? Какова вероятность того, что в многодетной семье из 8 детей будет 4 мальчика и 4 девочки?
- № 1.84.** Что более вероятно: выиграть 2 партии из четырёх или 3 партии из шести у равного по силе партнёра?
- № 1.85.** Вероятность ошибочной транзакции для некоторого банка составляет 0,002. Найти наиболее вероятное число ошибочных транзакций при проведении 4999 операций.
- № 1.86.** По шоссе за час проезжает 120 автомашин. Вероятность того, что проезжающей машине понадобится заправка на бензоколонке, равна 0,4. Какова вероятность того, что в течение часа на бензоколонке заправятся 20 машин?
- № 1.87.** В некотором регионе вероятность того, что летний день будет солнечным, равна 0,8. Какова вероятность того, что из 92 летних дней 75 будут солнечными?
- № 1.88.** Известно, что вероятность отчисления студента, попавшего в списки неуспевающих в семестре, равна 0,2. Какова вероятность того, что из 52 студентов из списка неуспевающих будут отчислены 15?
- № 1.89.** Вероятность бракованного изделия в продукции определённого вида равна 0,05. Какова вероятность того, что при проверке 100 изделий этого вида 90 окажутся без брака?
- № 1.90.** Вероятность того, что выданный кредит определённого вида будет погашен в срок, банк считает равным 0,9. Какова вероятность того, что из 150 выданных кредитов такого вида в срок будут погашены 140?
- № 1.91.** Вероятность ошибочной транзакции для некоторого банка составляет 0,001. Какова вероятность того, что из 2000 транзакций ошибочными будут 2?
- № 1.92.** У определённого вида морских моллюсков вероятность обнаружить жемчужину равна 0,004. Какова вероятность того, что из 1000 моллюсков жемчужину обнаружили только у одного?

- № 1.93.** Вероятность укуса человека клещом определённого вида при прогулке по лесу в некотором регионе равна 0,01. Известно, что 10% клещей этого вида являются носителями вируса энцефалита. Какова вероятность того, что из 1000 человек, гулявших по лесу в этом регионе, энцефалитом заболеют 5?
- № 1.94.** В течение года из-за возможных изменений условий хранения (влажность, температура) вероятность выхода из строя изделия равна 0,0003. Какова вероятность того, что в течение года хранения на этом складе 2000 изделий из строя выйдет только одно?
- № 1.95.** При работе высокоточного станка-автомата на каждую 1000 изделий выходит 1 бракованное. Какова вероятность того, что из 5000 изделий, изготовленных на этом автомате, бракованными окажутся 2 изделия?
- № 1.96.** По шоссе за час проезжает 120 автомашин. Вероятность того, что проезжающей машине понадобится заправка на бензоколонке, равна 0,4. Какова вероятность того, что в течение часа на бензоколонке заправятся не более 20 машин?
- № 1.97.** В некотором регионе вероятность того, что летний день будет солнечным, равна 0,8. Какова вероятность того, что из 92 летних дней не менее 75 будут солнечными?
- № 1.98.** Вероятность бракованного изделия в продукции определённого вида равна 0,05. Какова вероятность того, что при проверке 100 изделий этого вида окажутся без брака от 90 до 95 изделий?
- № 1.99.** Вероятность ошибочной транзакции для некоторого банка составляет 0,001. Какова вероятность того, что из 2000 транзакций ошибочными будут не более двух?
- № 1.100.** В течение года из-за возможных изменений условий хранения (влажность, температура) вероятность выхода из строя изделия равна 0,0003. Какова вероятность того, что в течение года хранения на этом складе 2000 изделий из строя выйдет более одного изделия?

Таблица значений функции Гаусса  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

|     | 0      | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 0,3989 | 0,3989 | 0,3989 | 0,3988 | 0,3986 | 0,3984 | 0,3982 | 0,3980 | 0,3977 | 0,3973 |
| 0,1 | 0,3970 | 0,3965 | 0,3961 | 0,3956 | 0,3951 | 0,3945 | 0,3939 | 0,3932 | 0,3925 | 0,3918 |
| 0,2 | 0,3910 | 0,3902 | 0,3894 | 0,3885 | 0,3876 | 0,3867 | 0,3857 | 0,3847 | 0,3836 | 0,3825 |
| 0,3 | 0,3814 | 0,3802 | 0,3790 | 0,3778 | 0,3765 | 0,3752 | 0,3739 | 0,3726 | 0,3712 | 0,3698 |
| 0,4 | 0,3683 | 0,3668 | 0,3652 | 0,3637 | 0,3621 | 0,3605 | 0,3589 | 0,3572 | 0,3555 | 0,3538 |
| 0,5 | 0,3521 | 0,3503 | 0,3485 | 0,3467 | 0,3448 | 0,3429 | 0,3410 | 0,3391 | 0,3372 | 0,3352 |
| 0,6 | 0,3332 | 0,3312 | 0,3292 | 0,3271 | 0,3251 | 0,3230 | 0,3209 | 0,3187 | 0,3166 | 0,3144 |
| 0,7 | 0,3123 | 0,3101 | 0,3079 | 0,3056 | 0,3034 | 0,3011 | 0,2989 | 0,2966 | 0,2943 | 0,2920 |
| 0,8 | 0,2897 | 0,2874 | 0,2850 | 0,2827 | 0,2803 | 0,2780 | 0,2756 | 0,2732 | 0,2709 | 0,2685 |
| 0,9 | 0,2661 | 0,2637 | 0,2613 | 0,2589 | 0,2565 | 0,2541 | 0,2516 | 0,2492 | 0,2468 | 0,2444 |
| 1,0 | 0,2420 | 0,2396 | 0,2371 | 0,2347 | 0,2323 | 0,2299 | 0,2275 | 0,2251 | 0,2227 | 0,2203 |
| 1,1 | 0,2179 | 0,2155 | 0,2131 | 0,2107 | 0,2083 | 0,2059 | 0,2036 | 0,2012 | 0,1989 | 0,1965 |
| 1,2 | 0,1942 | 0,1919 | 0,1895 | 0,1872 | 0,1849 | 0,1826 | 0,1804 | 0,1781 | 0,1758 | 0,1736 |
| 1,3 | 0,1714 | 0,1691 | 0,1669 | 0,1647 | 0,1626 | 0,1604 | 0,1582 | 0,1561 | 0,1539 | 0,1518 |
| 1,4 | 0,1497 | 0,1476 | 0,1456 | 0,1435 | 0,1415 | 0,1394 | 0,1374 | 0,1354 | 0,1334 | 0,1315 |
| 1,5 | 0,1295 | 0,1276 | 0,1257 | 0,1238 | 0,1219 | 0,1200 | 0,1182 | 0,1163 | 0,1145 | 0,1127 |
| 1,6 | 0,1109 | 0,1092 | 0,1074 | 0,1057 | 0,1040 | 0,1023 | 0,1006 | 0,0989 | 0,0973 | 0,0957 |
| 1,7 | 0,0940 | 0,0925 | 0,0909 | 0,0893 | 0,0878 | 0,0863 | 0,0848 | 0,0833 | 0,0818 | 0,0804 |
| 1,8 | 0,0790 | 0,0775 | 0,0761 | 0,0748 | 0,0734 | 0,0721 | 0,0707 | 0,0694 | 0,0681 | 0,0669 |
| 1,9 | 0,0656 | 0,0644 | 0,0632 | 0,0620 | 0,0608 | 0,0596 | 0,0584 | 0,0573 | 0,0562 | 0,0551 |
| 2,0 | 0,0540 | 0,0529 | 0,0519 | 0,0508 | 0,0498 | 0,0488 | 0,0478 | 0,0468 | 0,0459 | 0,0449 |
| 2,1 | 0,0440 | 0,0431 | 0,0422 | 0,0413 | 0,0404 | 0,0395 | 0,0387 | 0,0379 | 0,0371 | 0,0363 |
| 2,2 | 0,0353 | 0,0347 | 0,0339 | 0,0332 | 0,0325 | 0,0317 | 0,0310 | 0,0303 | 0,0297 | 0,0290 |
| 2,3 | 0,0283 | 0,0277 | 0,0270 | 0,0264 | 0,0258 | 0,0252 | 0,0246 | 0,0241 | 0,0235 | 0,0229 |
| 2,4 | 0,0224 | 0,0219 | 0,0213 | 0,0208 | 0,0203 | 0,0198 | 0,0194 | 0,0189 | 0,0184 | 0,0180 |
| 2,5 | 0,0175 | 0,0171 | 0,0167 | 0,0163 | 0,0158 | 0,0154 | 0,0151 | 0,0147 | 0,0143 | 0,0139 |
| 2,6 | 0,0136 | 0,0132 | 0,0129 | 0,0126 | 0,0122 | 0,0119 | 0,0116 | 0,0113 | 0,0110 | 0,0107 |
| 2,7 | 0,0104 | 0,0101 | 0,0099 | 0,0096 | 0,0093 | 0,0091 | 0,0088 | 0,0086 | 0,0084 | 0,0081 |
| 2,8 | 0,0079 | 0,0077 | 0,0075 | 0,0073 | 0,0071 | 0,0069 | 0,0067 | 0,0065 | 0,0063 | 0,0061 |
| 2,9 | 0,0060 | 0,0058 | 0,0056 | 0,0055 | 0,0053 | 0,0051 | 0,0050 | 0,0048 | 0,0047 | 0,0046 |
| 3,0 | 0,0044 | 0,0043 | 0,0042 | 0,0040 | 0,0039 | 0,0038 | 0,0037 | 0,0036 | 0,0035 | 0,0034 |
| 3,1 | 0,0033 | 0,0032 | 0,0031 | 0,0030 | 0,0029 | 0,0028 | 0,0027 | 0,0026 | 0,0025 | 0,0025 |
| 3,2 | 0,0024 | 0,0023 | 0,0022 | 0,0022 | 0,0021 | 0,0020 | 0,0020 | 0,0019 | 0,0018 | 0,0018 |
| 3,3 | 0,0017 | 0,0017 | 0,0016 | 0,0016 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0014 | 0,0014 | 0,0013 | 0,0013 |
| 3,4 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0010 | 0,0010 | 0,0010 | 0,0009 | 0,0009 |
| 3,5 | 0,0009 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0006 |
| 3,6 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0004 |
| 3,7 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 |
| 3,8 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 |
| 3,9 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0001 |

Таблица значений функции Лапласа  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

|     | 0        | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       | 9       |
|-----|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,0 | 0,00000  | 0,00399 | 0,00798 | 0,01197 | 0,01595 | 0,01994 | 0,02892 | 0,02790 | 0,03188 | 0,03586 |
| 0,1 | 0,03983  | 0,04380 | 0,04776 | 0,05172 | 0,05567 | 0,05962 | 0,06356 | 0,06749 | 0,07142 | 0,07535 |
| 0,2 | 0,07926  | 0,08317 | 0,08706 | 0,09095 | 0,09483 | 0,09871 | 0,10257 | 0,10642 | 0,11026 | 0,11409 |
| 0,3 | 0,11791  | 0,12172 | 0,12552 | 0,12930 | 0,13307 | 0,13683 | 0,14058 | 0,14431 | 0,14803 | 0,15173 |
| 0,4 | 0,15542  | 0,15910 | 0,16276 | 0,16640 | 0,17003 | 0,17364 | 0,17724 | 0,18082 | 0,18439 | 0,18793 |
| 0,5 | 0,19146  | 0,19497 | 0,19847 | 0,20194 | 0,20540 | 0,20884 | 0,21226 | 0,21566 | 0,21904 | 0,22240 |
| 0,6 | 0,22575  | 0,22907 | 0,23237 | 0,23565 | 0,23891 | 0,24215 | 0,24537 | 0,24857 | 0,25175 | 0,25490 |
| 0,7 | 0,25804  | 0,26115 | 0,26424 | 0,26730 | 0,27035 | 0,27337 | 0,27637 | 0,27935 | 0,28230 | 0,28524 |
| 0,8 | 0,28814  | 0,29103 | 0,29389 | 0,29673 | 0,29955 | 0,30234 | 0,30511 | 0,30785 | 0,31057 | 0,31327 |
| 0,9 | 0,31594  | 0,31859 | 0,32121 | 0,32381 | 0,32639 | 0,32894 | 0,33147 | 0,33398 | 0,33646 | 0,33891 |
| 1,0 | 0,34134  | 0,34375 | 0,34614 | 0,34850 | 0,35083 | 0,35314 | 0,35543 | 0,35769 | 0,35993 | 0,36214 |
| 1,1 | 0,36433  | 0,36650 | 0,36864 | 0,37076 | 0,37286 | 0,37493 | 0,37698 | 0,37900 | 0,38100 | 0,38298 |
| 1,2 | 0,38493  | 0,38686 | 0,38877 | 0,39065 | 0,39251 | 0,39435 | 0,39617 | 0,39796 | 0,39973 | 0,40147 |
| 1,3 | 0,40320  | 0,40490 | 0,40658 | 0,40824 | 0,40988 | 0,41149 | 0,41308 | 0,41466 | 0,41621 | 0,41774 |
| 1,4 | 0,41924  | 0,42073 | 0,42220 | 0,42364 | 0,42507 | 0,42647 | 0,42786 | 0,42922 | 0,43056 | 0,43189 |
| 1,5 | 0,43319  | 0,43448 | 0,43574 | 0,43699 | 0,43822 | 0,43943 | 0,44062 | 0,44179 | 0,44295 | 0,44408 |
| 1,6 | 0,44520  | 0,44630 | 0,44738 | 0,44845 | 0,44950 | 0,45053 | 0,45154 | 0,45254 | 0,45352 | 0,45449 |
| 1,7 | 0,45543  | 0,45637 | 0,45728 | 0,45818 | 0,45907 | 0,45994 | 0,46080 | 0,46164 | 0,46246 | 0,46327 |
| 1,8 | 0,46407  | 0,46485 | 0,46562 | 0,46638 | 0,46712 | 0,46784 | 0,46856 | 0,46926 | 0,46995 | 0,47062 |
| 1,9 | 0,47128  | 0,47193 | 0,47257 | 0,47320 | 0,47381 | 0,47441 | 0,47500 | 0,47558 | 0,47615 | 0,47670 |
| 2,0 | 0,47725  | 0,47778 | 0,47831 | 0,47882 | 0,47932 | 0,47982 | 0,48030 | 0,48077 | 0,48124 | 0,48169 |
| 2,1 | 0,48214  | 0,48257 | 0,48300 | 0,48341 | 0,48382 | 0,48422 | 0,48461 | 0,48500 | 0,48537 | 0,48574 |
| 2,2 | 0,48610  | 0,48645 | 0,48679 | 0,48713 | 0,48745 | 0,48778 | 0,48809 | 0,48840 | 0,48870 | 0,48899 |
| 2,3 | 0,48928  | 0,48956 | 0,48983 | 0,49010 | 0,49036 | 0,49061 | 0,49086 | 0,49111 | 0,49134 | 0,49158 |
| 2,4 | 0,49180  | 0,49202 | 0,49224 | 0,49245 | 0,49266 | 0,49286 | 0,49305 | 0,49324 | 0,49343 | 0,49361 |
| 2,5 | 0,49379  | 0,49396 | 0,49413 | 0,49430 | 0,49446 | 0,49461 | 0,49477 | 0,49492 | 0,49506 | 0,49520 |
| 2,6 | 0,49534  | 0,49547 | 0,49560 | 0,49573 | 0,49585 | 0,49598 | 0,49609 | 0,49621 | 0,49632 | 0,49643 |
| 2,7 | 0,49653  | 0,49664 | 0,49674 | 0,49683 | 0,49693 | 0,49702 | 0,49711 | 0,49720 | 0,49728 | 0,49736 |
| 2,8 | 0,49744  | 0,49752 | 0,49760 | 0,49767 | 0,49774 | 0,49781 | 0,49788 | 0,49795 | 0,49801 | 0,49807 |
| 2,9 | 0,49813  | 0,49819 | 0,49825 | 0,49831 | 0,49836 | 0,49841 | 0,49846 | 0,49851 | 0,49856 | 0,49861 |
| 3,0 | 0,49865  | 0,49869 | 0,49874 | 0,49878 | 0,49882 | 0,49886 | 0,49889 | 0,49893 | 0,49896 | 0,49900 |
| 3,1 | 0,49903  | 0,49906 | 0,49910 | 0,49913 | 0,49916 | 0,49918 | 0,49921 | 0,49924 | 0,49926 | 0,49929 |
| 3,2 | 0,49931  | 0,49934 | 0,49936 | 0,49938 | 0,49940 | 0,49942 | 0,49944 | 0,49946 | 0,49948 | 0,49950 |
| 3,3 | 0,49952  | 0,49953 | 0,49955 | 0,49957 | 0,49958 | 0,49960 | 0,49961 | 0,49962 | 0,49964 | 0,49965 |
| 3,4 | 0,49966  | 0,49968 | 0,49969 | 0,49970 | 0,49971 | 0,49972 | 0,49973 | 0,49974 | 0,49975 | 0,49976 |
| 3,5 | 0,49977  | 0,49978 | 0,49978 | 0,49979 | 0,49980 | 0,49981 | 0,49981 | 0,49982 | 0,49983 | 0,49983 |
| 3,6 | 0,49984  | 0,49985 | 0,49985 | 0,49986 | 0,49986 | 0,49987 | 0,49987 | 0,49988 | 0,49988 | 0,49989 |
| 3,7 | 0,49989  | 0,49990 | 0,49990 | 0,49990 | 0,49991 | 0,49991 | 0,49992 | 0,49992 | 0,49992 | 0,49992 |
| 3,8 | 0,49993  | 0,49993 | 0,49993 | 0,49994 | 0,49994 | 0,49994 | 0,49994 | 0,49995 | 0,49995 | 0,49995 |
| 3,9 | 0,49995  | 0,49995 | 0,49996 | 0,49996 | 0,49996 | 0,49996 | 0,49996 | 0,49996 | 0,49997 | 0,49997 |
| 4,0 | 0,499968 |         |         |         |         |         |         |         |         |         |

Таблица значений функции Пуассона  $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$

| $k \backslash \lambda$ | 0,1    | 0,2    | 0,3    | 0,4    | 0,5    | 0,6    | 0,7    | 0,8    | 0,9    | 1,0    |
|------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0                      | 0,9048 | 0,8187 | 0,7408 | 0,6703 | 0,6065 | 0,5488 | 0,4966 | 0,4493 | 0,4066 | 0,3679 |
| 1                      | 0,0905 | 0,1637 | 0,2223 | 0,2681 | 0,3033 | 0,3293 | 0,3476 | 0,3595 | 0,3659 | 0,3679 |
| 2                      | 0,0045 | 0,0164 | 0,0333 | 0,0536 | 0,0758 | 0,0988 | 0,1216 | 0,1438 | 0,1647 | 0,1839 |
| 3                      | 0,0002 | 0,0011 | 0,0033 | 0,0072 | 0,0126 | 0,0198 | 0,0284 | 0,0383 | 0,0494 | 0,0613 |
| 4                      | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0007 | 0,0016 | 0,0030 | 0,0050 | 0,0077 | 0,0111 | 0,0153 |
| 5                      | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0007 | 0,0012 | 0,0020 | 0,0031 |
| 6                      | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0005 |

| $k \backslash \lambda$ | 2,0    | 3,0    | 4,0    | 5,0    | 6,0    | 7,0    | 8,0    | 9,0    | 10,0   |
|------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0                      | 0,1353 | 0,0498 | 0,0183 | 0,0067 | 0,0025 | 0,0009 | 0,0003 | 0,0001 | 0,0001 |
| 1                      | 0,2707 | 0,1494 | 0,0733 | 0,0337 | 0,0149 | 0,0064 | 0,0027 | 0,0011 | 0,0005 |
| 2                      | 0,2707 | 0,2240 | 0,1465 | 0,0842 | 0,0446 | 0,0223 | 0,0107 | 0,0050 | 0,0023 |
| 3                      | 0,1805 | 0,2240 | 0,1954 | 0,1404 | 0,0892 | 0,0521 | 0,0286 | 0,0150 | 0,0076 |
| 4                      | 0,0902 | 0,1681 | 0,1954 | 0,1755 | 0,1339 | 0,0912 | 0,0572 | 0,0337 | 0,0189 |
| 5                      | 0,0361 | 0,1008 | 0,1563 | 0,1755 | 0,1606 | 0,1277 | 0,0916 | 0,0607 | 0,0378 |
| 6                      | 0,0120 | 0,0504 | 0,1042 | 0,1462 | 0,1606 | 0,1490 | 0,1221 | 0,0911 | 0,0631 |
| 7                      | 0,0034 | 0,0216 | 0,0595 | 0,1045 | 0,1377 | 0,1490 | 0,1396 | 0,1171 | 0,0901 |
| 8                      | 0,0009 | 0,0081 | 0,0298 | 0,0653 | 0,1033 | 0,1304 | 0,1396 | 0,1318 | 0,1126 |
| 9                      | 0,0002 | 0,0027 | 0,0132 | 0,0363 | 0,0689 | 0,1014 | 0,1241 | 0,1318 | 0,1251 |
| 10                     | 0,0000 | 0,0008 | 0,0053 | 0,0181 | 0,0413 | 0,0710 | 0,0993 | 0,1186 | 0,1251 |
| 11                     | 0,0000 | 0,0002 | 0,0019 | 0,0082 | 0,0225 | 0,0452 | 0,0722 | 0,0970 | 0,1137 |
| 12                     | 0,0000 | 0,0001 | 0,0006 | 0,0034 | 0,0113 | 0,0264 | 0,0481 | 0,0728 | 0,0948 |
| 13                     | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0013 | 0,0052 | 0,0142 | 0,0296 | 0,0504 | 0,0729 |
| 14                     | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0005 | 0,0022 | 0,0071 | 0,0169 | 0,0324 | 0,0521 |
| 15                     | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0009 | 0,0033 | 0,0090 | 0,0194 | 0,0347 |
| 16                     | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0003 | 0,0015 | 0,0045 | 0,0109 | 0,0217 |
| 17                     | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0006 | 0,0021 | 0,0058 | 0,0128 |
| 18                     | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0009 | 0,0029 | 0,0071 |