

I. Определение вероятности и основные правила ее вычисления

1.1 Вероятностный эксперимент. Предмет теории вероятностей

Результаты эксперимента зависят в той или иной степени от комплекса условий, при которых он осуществляется. Эти условия или существуют объективно или создаются искусственно (это значит, эксперимент планируется). Учитывая степень зависимости результатов эксперимента от условий, при которых он осуществляется, все эксперименты условно разделяют на два класса: детерминированные и вероятностные.

Детерминированные эксперименты – это такие эксперименты, результаты которых можно предвидеть заранее на основании естественно-научных законов, исходя из комплекса условий s . Примерами детерминированных процессов являются все процессы, основанные на использовании законов классической механики, согласно с которыми движение тела однозначно определяется заданными начальными условиями и силами, которые действуют на тело.

Вероятностные эксперименты, которые иногда называют стохастическими или случайными – это эксперименты, которые можно повторять произвольное количество раз при сохранении одних и тех же по возможности постоянных условий, но в отличие от детерминированных экспериментов исход вероятностного эксперимента неоднозначен, случаен. Другими словами, на основании комплекса условий s нельзя заранее предвидеть результат вероятностного эксперимента.

Пример. Допустим, что некто заполняет карточку спортлото. До проведения тиража выигрышей невозможно предсказать, сколько номеров будет правильно названо. Но опыт проведения тиража спортлото говорит о том, что средний процент игроков, которые правильно отгадали m ($1 \leq m \leq 6$) номеров, в большинстве случаев колеблется около определенной постоянной величины. Эти «закономерности» (средний процент правильного отгадывания данного количества номеров) используется для расчета фондов выигрыша.

Можно назвать некоторые общие черты вероятностных экспериментов: множество возможных исходов, непредсказуемость результата, наличие определенных количественных закономерностей при многочисленном повторении вероятностного эксперимента, если его условия по возможности стабильные. Совокупность результатов таких экспериментов подчиняется определенным законам, которые изучаются методом моделирования.

Таким образом, теория вероятностей – раздел современной математики, в котором изучаются математические модели случайных экспериментов и закономерности, которые проявляются в больших сериях таких экспериментов.

Теория вероятностей возникла в 17-ом столетии в связи с потребностями страхового дела и решением комбинаторных задач теории азартных игр. Азартные игры и страхование являются классическими примерами вероятностных экспериментов. Их математические модели

давали возможность ориентироваться в ходе игры, делать расчет ставок, оценивать шансы выигрыша, а также планировать расходы и доходы страховых компаний и т.п.

Элементы строения математических моделей были заложены еще в работах Б.Паскаля (1629–1662), П. Ферма (1601–1665), Х. Гюйгенса (1629–1695). Основы классической теории вероятностей, которая в значительной степени сохранилась неизменной и в наше время, были сформулированы в работах Я. Бернулли (1654–1705), А. Муавра (1667–1754), П. Лапласа (1749–1827), С. Пуассона (1781–1840), К. Гаусса (1777–1855), Т. Бейеса (1702–1762). Эти работы были вызваны потребностями естественных наук (астрономии, геодезии, военного дела и других). Они и в данное время являются основой теории информации, теории надежности, кибернетики, теории ошибок.

1.2. Пространство элементарных событий

Строение математической модели вероятностного эксперимента обычно начинается с описания его возможных исходов. При проведении произвольного эксперимента E можно выделить некоторые элементарные события (или исходы), которые характеризуются тем, что произвольное повторение эксперимента E может закончиться одним и только одним из этих исходов, которые взаимно исключают друг друга.

Определение 1. Элементарным событием (элементарным исходом) ω называется любой возможный исход (результат) эксперимента E .

Определение 2. Пространством элементарных событий (исходов), которые соответствуют данному эксперименту E , называется множество Ω всех его возможных исходов.

Таким образом, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ – пространство элементарных событий, ω_i ($i = \overline{1, N}$) – элементарные события (исходы), N – число элементарных событий.

Определение пространства событий – первый шаг в построении вероятностной модели эксперимента.

Приведем некоторые примеры пространства элементарных событий.

Пример 1. Подбрасывание монеты один раз. При математическом описании этого эксперимента натурально абстрагироваться от ряда несущественных исходов (монета станет на ребро, закатится куда-нибудь и др.) и ограничиться только двумя: выпадение герба (ω_Γ), выпадение решки (ω_p). Таким образом, имеем:

$$\Omega = \{\omega_\Gamma, \omega_p\} \text{ или } \Omega = \{\Gamma, p\}.$$

Пример 2. Подбрасывание игральной кости один раз. В этом эксперименте натурально выбрать $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, где ω_k – элементарный исход, который заключается в выпадении k очков ($k = \overline{1, 6}$).

Пример 3. Подбрасывание монеты n раз.

Каждому исходу эксперимента натурально поставить в соответствие последовательность длины n по следующему правилу: если при k -ом подбрасывании монеты выпал герб, то на k -ом месте последовательности пишем ω_{Γ} или просто Γ , а при выпадении решки – ω_p или просто p . Так, последовательность $\Gamma\Gamma\ldots\Gamma\Gamma$ означает исход эксперимента, который состоит в том, что каждый раз выпадал герб. При небольших значениях n все элементарные события нетрудно выписать. К примеру,

$$\text{при } n = 2 \quad \Omega = \{\omega_{\Gamma}\omega_{\Gamma}, \omega_{\Gamma}\omega_p, \omega_p\omega_{\Gamma}, \omega_p\omega_p\} \text{ или } \Omega = \{\Gamma\Gamma, \Gamma p, p\Gamma, pp\}.$$

При $n = 3$

$$\Omega = \{\omega_{\Gamma}\omega_{\Gamma}\omega_{\Gamma}, \omega_{\Gamma}\omega_{\Gamma}\omega_p, \omega_{\Gamma}\omega_p\omega_{\Gamma}, \omega_p\omega_{\Gamma}\omega_{\Gamma}, \omega_p\omega_p\omega_{\Gamma}, \omega_p\omega_{\Gamma}\omega_p, \omega_{\Gamma}\omega_p\omega_p, \omega_p\omega_p\omega_p\}$$

или

$$\Omega = \{\Gamma\Gamma\Gamma, \Gamma\Gamma p, \Gamma p\Gamma, p\Gamma\Gamma, pp\Gamma, p\Gamma p, \Gamma pp, ppp\}.$$

Очевидно, что количество элементарных событий при произвольном n равна 2^n . Действительно, по первому знаку последовательности множество Ω можно разбить на две группы цепочек вида $\{\Gamma\ldots\}$, $\{p\ldots\}$. Каждую из этих групп, фиксируя второй знак последовательности, можно снова разбить на две группы. Получим $2 \cdot 2$ групп: $\{\Gamma\Gamma\ldots\}$, $\{\Gamma p\ldots\}$, $\{p\Gamma\ldots\}$, $\{pp\ldots\}$.

Фиксируя третий знак, получим $2 \cdot 2 \cdot 2$ групп. Продолжая этот процесс до фиксирования n знаков, мы получаем 2^n групп, каждая из которых состоит из одной последовательности.

1.3 Элементы комбинаторики

При рассмотрении классических моделей вероятности часто приходится выбирать из некоторого множества объектов подмножества элементов, которые имеют те или иные свойства. В таких задачах рассматривают те или иные комбинации объектов и осуществляют отсчет количества всех возможных комбинаций, составленных по некоторому правилу. Такие задачи называют комбинаторными задачами, а раздел математики, где их изучают, называют комбинаторикой.

Одним из главных методов подсчета количества элементарных исходов в том или ином пространстве элементарных событий является принцип умножения.

Теорема. Если выполняется два действия, причем первое из них может быть выполнено k способами, а второе действие – n способами, то оба действия могут быть выполнены $n \cdot k$ способами.

Доказательство. Пусть первое действие имеет исходы $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, а второе действие – исходы $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Тогда все исходы обоих действий отображены в таблице, которая приводится ниже и доказывает теорему.

II \ I	I				
	a_1	a_2	$\dots$	a_k	
b_1	(a_1, b_1)	(a_2, b_1)	$\dots$	(a_k, b_1)	

b_2	(a_1, b_2)	(a_2, b_2)	$\dots$	(a_k, b_2)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \dots$	$\vdots$
b_n	(a_1, b_n)	(a_2, b_n)	$\dots$	(a_k, b_n)

Следствие (принцип умножения). Если выполняется k действий, причем первое действие выполняется n_1 способами, второе – n_2 способами, k -ое действие – n_k способами, то все k действий могут быть выполнены $N = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ способами.

Доказательство следствия получается из теоремы с помощью метода математической индукции.

Рассмотрим некоторые пространства элементарных исходов, которые часто встречаются.

а) Размещения.

Пусть задано множество, которое содержит n элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$. Рассматриваются всевозможные комбинации по k элементов типа $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ с учетом порядка внутри каждой из них; другими словами, k из n элементов размещаются на k местах. Каждое такое упорядоченное подмножество, составленное из k элементов, или каждая комбинация из k элементов, выбранных из n элементов, называется размещением из n элементов по k элементов. Для обозначения количества всех размещений из n элементов по k элементов используется запись A_n^k (читается « A из n по k » или «количество размещений из n по k »); A – первая буква французского слова arrangement, что значит: размещение, приведенное к порядку).

Первый элемент подмножества, которое состоит из k элементов, можно выбрать n способами, второй – уже только $(n-1)$ способами, третий $(n-2)$ способами. Последний k -ый элемент подмножества можно выбрать $n-(k-1)$ способами, так как к моменту выбора k -го элемента в множестве остаются невыбранными $n-(k-1)$ элемент. На основании принципа умножения получаем

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Замечание. Множество называется упорядоченным, если для каждого двух его элементов a и b определено отношение порядка $a \leq b$ или $b \leq a$ (a не превышает b или b не превышает a), которое имеет свойства:

- 1) $a \leq a$, т.е. каждый элемент не превышает самого себя (рефлексивность);
- 2) если $a \leq b$ и $b \leq a$, то элементы a и b совпадают (антисимметричность);
- 3) если $a \leq b$, $b \leq c$, то $a \leq c$ (транзитивность).

Пустое множество считается упорядоченным. Множество можно упорядочить разными способами.

б) Перестановка.

Пусть задано множество, которое содержит n элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$. Рассматриваются всякие комбинации по n элементов типа $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$, где каждый элемент a_{i_k} встречается один раз. Такие размещения из n элементов по n элементов называются перестановками из n элементов.

Перестановки являются частным случаем размещений. Так как каждая перестановка содержит все n элементов множества, то разные перестановки отличаются друг от друга только порядком элементов. Для обозначения количества всех перестановок из n элементов используют запись P_n (P – первая буква французского слова permutation – перестановка). На основании принципа умножения или учитывая, что $P_n = A_n^n$, получаем

$$P_n = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Из последней формулы следует, что множество, которое содержит n элементов, можно упорядочить $n!$ способами.

в) Сочетания.

Пусть задано множество, которое содержит n элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$. Рассматриваются комбинации по k элементов типа $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$, в которых не учитывается порядок элементов, так что комбинации с одними и теми же элементами считаются одинаковыми.

Каждое k -элементное подмножество множества, состоящее из n элементов, называется сочетанием из n элементов по k элементов.

Количество всех сочетаний из n элементов по k элементов обозначается C_n^k (читается «количество сочетаний из n по k »: C – первая буква французского слова combinaison – сочетание).

Создадим все возможные неупорядоченные подмножества, которые содержат k элементов из n . Их количество равно C_n^k . Затем из каждого полученного подмножества составим все упорядоченные подмножества, каждое из которых можно упорядочить $k!$ способами. На основе принципа умножения получаем

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k,$$

$$\text{откуда } C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \text{ или } C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Пример 1. Сколько различных целых чисел можно образовать, если каждое из них выражается четырьмя различными цифрами?

Решение. Всех цифр десять: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Комбинации, образованные четырьмя разными цифрами из десяти являются размещениями, так как эти комбинации цифр представляют собой конечные упорядоченные множества. (Числа 3124 и 4123 являются разными, хоть и образованы одними и теми же цифрами. Числа 3124, 3125, 3167, 3789 и т.п. – тоже разные). Количество таких размещений равно $A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$. Но комбинации, у которых на первом месте стоит 0, не образуют

четырёхзначных целых чисел. Их число равно $A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$. Следовательно, окончательный ответ будет $A_{10}^4 - A_9^3 = 5040 - 504 = 4536$.

Пример 2. Для проведения экзамена у студентов создается комиссия из трех преподавателей. Сколько разных комиссий можно составить из пяти преподавателей?

Решение. Комиссии будут разными, если они отличаются составом преподавателей (хотя бы одним). Комбинации (Сидоров, Петров, Иванов) и (Иванов, Петров, Сидоров) по смыслу считаются одинаковыми. Поэтому количество таких комиссий равно C_5^3 .

$$C_5^3 = \frac{A_5^3}{P_3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

Пример 3. Наугад взятый телефонный номер состоит из 5 цифр. Сколько будет телефонных номеров, если известно, что все цифры нечетные и разные?

Решение. Так как всех нечетных цифр пять: 1, 3, 5, 7, 9 и в телефонном номере все цифры разные, то комбинации цифр в данном случае будут перестановками, а их количество равно

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Пример 4. Сколько существует способов разместить 9 студентов в трех комнатах студенческого общежития, рассчитанных на трех человек?

Решение. В первую комнату можно поселить студентов C_9^3 способами. Во вторую комнату можно поселить студентов C_6^3 способами. В третью комнату можно поселить студентов $C_3^3 = 1$ способом. На основании принципа умножения получаем, что во всех трех комнатах можно разместить студентов

$$C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot 1 \text{ или } \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1 = 84 \cdot 20 \cdot 1 = 1680 \text{ способами.}$$

1.4 Классификация событий. Операции над событиями

Определение 1. Если эксперимент E имеет конечное число исходов, то случайным событием или просто событием называется произвольное подмножество A пространства Ω элементарных событий.

События обозначают прописными латинскими буквами.

Пример. Пусть бросают игральную кость. Пространство элементарных событий этого эксперимента $\Omega = \{\omega_i | i = \overline{1,6}\}$, где $\omega_i \in \Omega$ обозначает элементарное событие (выпало i очков) или («может выпасть»). Каждое из элементарных событий, к примеру, ω_4 (выпадение четырех очков) может произойти или не произойти в итоге эксперимента. Примем во внимание тот факт, что одновременно с появлением элементарного события ω_4 происходит много других, более сложных событий. К примеру, $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ – выпадение четного числа очков.

Очевидно, что если произошло элементарное событие ω_4 , то одновременно с этим не произошло событие $C = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ – выпадение нечетного числа очков.

Из приведенного примера видно, что одни события происходят в результате эксперимента, а другие – нет. Легко заметить, что событие $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} = \{\text{выпадение четного числа очков}\}$ происходит одновременно с наступлением одного из элементарных событий $\omega_2, \omega_4, \omega_6$. Поэтому, когда мы говорим, что событие A произошло, то это означает, что эксперимент закончился одним из элементарных событий $\omega \in A$.

Определение 2. Событие называется достоверным, если оно совпадает с пространством элементарных событий, т.е. когда $A \in \Omega$.

Другими словами, событие $A \in \Omega$ происходит всегда при каждом повторении вероятностного эксперимента.

Определение 3. Событие A называется невозможным, если оно совпадает с пустым множеством, т.е. если $A = \emptyset$.

Определение 4. Событием $\bar{A}$, противоположным к событию A , называется дополнением множества A к Ω , т.е. событие, которое состоит из таких элементарных исходов ω эксперимента E , которые не входят в событие A :

$$\bar{A} = \{\omega | \omega \notin A\}, \text{ (рис. 1.1)}$$

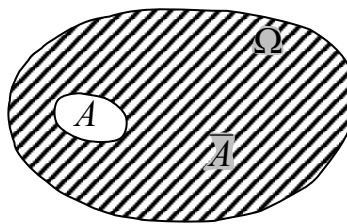


Рис. 1.1

Противоположное событие $\bar{A}$ происходит тогда и только тогда, когда событие A не происходит. К примеру, при подбрасывании игральной кости $\Omega = \{\omega_i | i = \overline{1,6}\}$ событие $\bar{A} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} = \{\text{выпадение четного числа очков}\}$ является противоположным к событию $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\} = \{\text{выпадение нечетного числа очков}\}$.

Определение 5. Суммой (объединением) двух событий A и B называется событие, которое состоит из тех элементарных исходов $\omega_i \in \Omega$, которые принадлежат хотя бы одному из этих событий. Сумму двух событий обозначают $A \cup B$ или $A + B$:

$$A \cup B = A + B = \{\omega | \omega \in A \text{ или } \omega \in B\}, \text{ (рис. 1.2).}$$

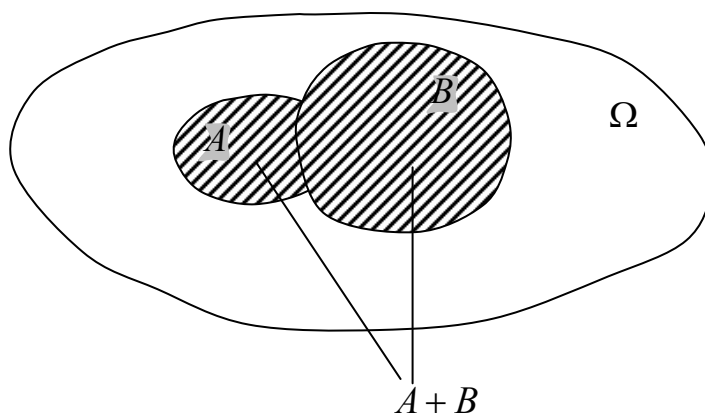


Рис. 1.2

Для произвольного события A имеют место соотношения:

$$A \cup A = A, A \cup \emptyset = A, A \cup \Omega = \Omega.$$

Определение 6. Множество L называется счетным, если между его элементами и натуральными числами можно установить взаимно-однозначное соответствие (т.е. элементы множества L можно пронумеровать). К примеру, множество Z целых чисел, множество Q рациональных чисел являются счетными.

Определение 7 (обобщение определения 5). Суммой (объединением) конечной или счетной последовательности событий $A_1, A_2, \dots$ называется событие, состоящее из тех элементарных событий $\omega \in \Omega$, которые входят хотя бы в одно из событий A_i . Сумму конечной последовательности событий будем обозначать символом $\bigcup_{i=1}^n A_i = \{\omega \mid \omega \in A_1, \text{ или } \omega \in A_2, \dots, \text{ или } \omega \in A_n, \text{ или } \omega \text{ принадлежит нескольким } A_i \text{ или всем } A_i\}$, а сумму счетной последовательности событий – символом

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega \mid \omega \in A_1, \text{ или } \omega \in A_2, \dots\}.$$

Определение 8. Произведением (пересечением) двух событий A и B называется событие, которое состоит из тех элементарных событий $\omega \in \Omega$, которые принадлежат как событию A , так и событию B . Произведения двух событий обозначают символом $AB = A \cap B$:

$$A \cdot B = A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ и } \omega \in B\}, \text{ (рис. 1.3).}$$

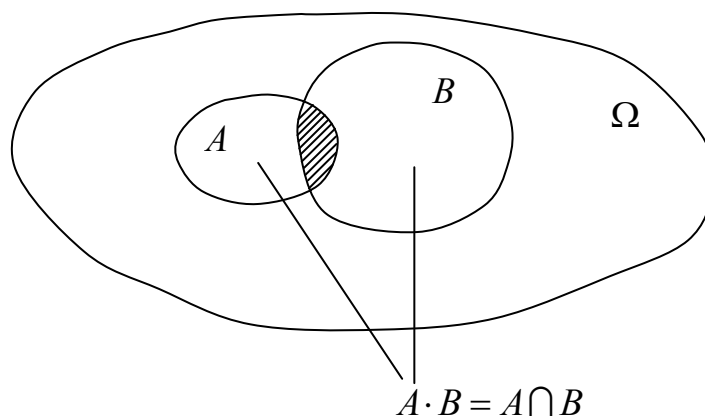


Рис. 1.3

Для произвольного события A имеют место соотношения:

$$A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap \Omega = A.$$

Определение 9 (обобщение определения 8). Произведением (пересечением) конечной или счетной последовательности событий $A_1, A_2, \dots$ называется событие, которое состоит из тех элементарных событий $\omega \in \Omega$, которые входят одновременно во все события A_i ($i = \overline{1, n}$ или $i = \overline{1, \infty}$).

Произведение конечной последовательности событий обозначают символом

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{\omega \mid \omega \in A_1 \text{ и } A_2 \text{ и } \dots A_n\},$$

а произведение счетной последовательности событий – символом

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega \mid \omega \in A_1 \text{ и } A_2 \text{ и } \dots A_n\}.$$

Определение 10. Разностью двух событий A и B называется событие, которое состоит из тех элементарных событий $\omega \in \Omega$, которые входят в A и не входят в событие B . Разность двух событий обозначают символом $A \setminus B$.

$$A \setminus B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ и } \omega \notin B\}, \text{ (рис. 1.4).}$$

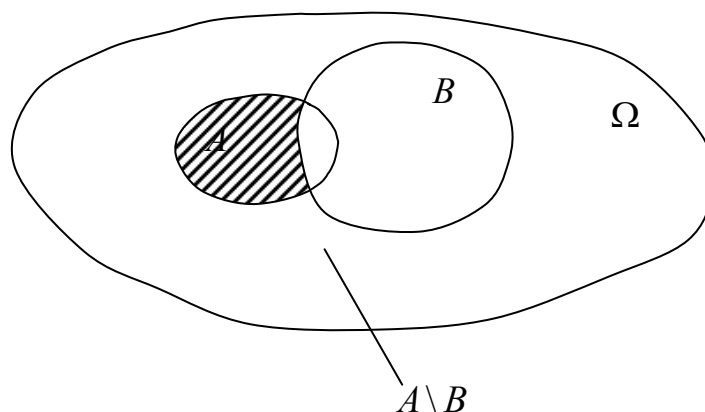


Рис. 1.4

Имеет место равенство: $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Определение 11. Два события A и B называются несовместными, если их пересечение есть невозможное событие. т.е. $A \cap B = \emptyset$ (рис. 1.5).

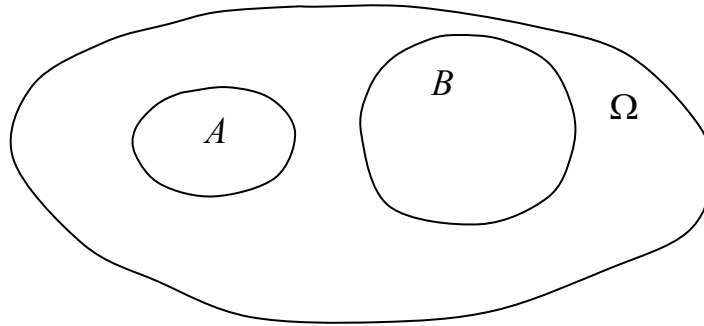


Рис. 1.5

Так как для $\forall i \neq j \quad \omega_i \cap \omega_j = \emptyset$, то элементарные события $\omega_i \in \Omega$ являются несовместными событиями.

1.5 Алгебра событий

Пусть Ω – пространство элементарных событий, число которых конечно, а F – система подмножеств пространства Ω .

Определение 1. Система F всех подмножеств пространства Ω называется алгеброй событий, если выполняются условия: 1) $\emptyset \in F$, $\Omega \in F$, 2) для произвольных $A, B \in F \Rightarrow A + B \in F$, $A \cdot B \in F$, $A \setminus B \in F$ (т.е. система подмножеств F является замкнутой по отношению к операции $+$, $\cdot$, $\setminus$).

Пример. Пусть эксперимент заключается в исследовании надежности работы некоторого механизма, который содержит только 2 элемента. Обозначим элементарные исходы следующим образом: ω_0 – два элемента работают нормально; ω_1 – один элемент работает, второй отказал; ω_2 – два элемента отказали и не работают.

Тогда пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$, а система F всех подмножеств пространства Ω имеет строение:

$$F = \{\{\emptyset\}, \{\omega_0\}, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_0, \omega_1\}, \{\omega_0, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\Omega\}\},$$

причем событиям $A_i \in F$, $i = \overline{1, 8}$ можно дать следующую трактовку:

$A_1 = \emptyset = \overline{\Omega}$, $A_2 = \{\omega_0\}$ – оба элемента работают;

$A_3 = \{\omega_1\}$ – отказал один элемент;

$A_4 = \{\omega_2\}$ – отказали 2 элемента;

$A_5 = \{\omega_0, \omega_1\}$ – отказало не более одного элемента;

$A_6 = \{\omega_0, \omega_2\}$ – или оба элемента отказали, или оба работают;

$A_7 = \{\omega_1, \omega_2\}$ – или отказал один, или отказали два элемента;

$A_8 = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$ – или оба элемента работают, или один элемент отказал, или отказали два элемента.

Очевидно, что событие $A_1 = \emptyset$ есть противоположное к событию $\{\Omega\}$, событие $A_5 = \{\omega_0, \omega_1\} = \{\omega_0\} \cup \{\omega_1\}$ есть сумма двух элементарных событий $\{\omega_0\}$ и $\{\omega_1\}$. В то же время событие A_5 можно рассматривать как

противоположное к событию A_4 , так как событие A_5 дополняет событие A_4 до пространства Ω : $\overline{A_5} = A_4$, $\overline{A_4} = A_5$.

Аналогично, $A_7 = \{\omega_1, \omega_2\} = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\}$ или $A_7 = \overline{A_2}$, так как событие A_2 дополняет событие A_7 до пространства $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$.

Легко убедиться, что в случае пространства элементарных событий, которое содержит конечное или счетное число элементарных событий ω эксперимента E , система F всех подмножеств множества Ω может быть построена с помощью операций объединения и дополнения элементарных событий до Ω .

Таким образом, в рассмотренном примере система F подмножеств пространства Ω образует алгебру событий.

Замечание. Если имеем пространство Ω элементарных исходов и наряду с условиями 1 и 2 определения 1 выполняется еще условие 3) если каждое событие A_i конечной или счетной последовательности событий $A_1, A_2, \dots$ принадлежит системе множеств F , то и сумма этих событий принадлежит э той системе, это значит, если $A_i \in F (i = \overline{1, \infty}) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$, то система F подмножеств пространства Ω называется в этом случае σ -алгеброй.

1.6 Относительная частота

Пусть вероятностный эксперимент E повторен n раз в m случаях произошло событие A . Тогда число m , называется частотой, а отношение $\frac{m}{n}$ – относительной частотой наступления события A и обозначается буквой W :

$$W(A) = \frac{m}{n}.$$

Относительная частота имеет следующие свойства:

- 1) $0 \leq W(A) \leq 1$ ($W(A) \in [0, 1]$);
- 2) $W(\Omega) = 1$ (относительная частота достоверного события равна 1);
- 3) если $A_1, A_2, \dots$ – произвольная счетная последовательность взаимно несовместных событий, то имеет место равенство

$$W\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} W(A_i).$$

Относительная частота наступления события A может быть вычислена только после проведения вероятностного эксперимента.

Таким образом, относительная частота является послеэкспериментной (апостериорной) характеристикой.

Относительная частота наступления случайного события в разных сериях экспериментов не является постоянно величиной. Однако, если условия вероятностного эксперимента являются достаточно стабильными, то относительная частота обладает свойством устойчивости, это значит она в

большинстве экспериментов колеблется около некоторой постоянной величины, и амплитуда этих колебаний уменьшается с увеличением количества n испытаний.

1.7 Аксиоматическое определение вероятности. Вероятностное пространство

Относительная частота $W(A) = \frac{m}{n}$ характеризует частоту появления события A . когда эксперимент уже произошел. Но чаще необходимо иметь доэкспериментную (априорную) характеристику наступления событий $A \in F$, которая бы моделировала частотные закономерности наступления этих событий.

В предыдущих параграфах были выполнены следующие этапы построения математической модели вероятностного эксперимента; 1) описано пространство элементарных событий Ω ; 2) выделена алгебра или σ -алгебра событий F .

Замечание. Если пространство элементарных событий Ω содержит конечное число событий, то произвольная алгебра подмножеств пространства Ω является в то же время и σ -алгеброй, так как количество всех подмножеств в этом случае конечно, и, следовательно, последовательность $\{A_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ не может содержать бесконечное количество разных множеств, а сумма $B = A_1 + A_2 + \dots$ содержит в этом случае конечное число слагаемых.

В дальнейшем будем рассматривать только события $A \in F$. Таким образом, построено множество (Ω, F) .

Следующий шаг построения математической модели – задание на (Ω, F) числовой характеристики (вероятностной меры) для измерения объективной возможности наступления событий.

При этом примем во внимание, что не всякую числовую характеристику множества A можно считать мерой этого множества, а только такую, которая удовлетворяет следующим условиям (аксиомы меры):

- 1) $\mu(A) \geq 0$;
- 2) $\mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B)$ (аксиома конечной адитивности, если $A \cap B = \emptyset$;
- 3) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ (аксиома счетной адитивности, если для $\forall i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$).

К примеру, площади фигур, объемы и массы тел удовлетворяют этим условиям (аксиома) и их можно взять в качестве меры соответственно фигур и тел. Диаметры фигур и тел (верхние границы расстояний между произвольными точками фигуры или тела) не удовлетворяют условию адитивности и не могут быть взяты в качестве меры фигуры или тела.

Кроме того, чтобы с помощью меры можно было сравнивать разные множества в относительных единицах, требуют, чтобы мера удовлетворяла условию нормирования: $0 \leq \mu(A) \leq 1$.

Существует набор разных требований (аксиом), которые предъявляют к числовой характеристике, которая выражает степень возможности появления событий $A \in F$, это значит к вероятностной мере, которую обозначают символом $P(A)$.

Ниже приводим определение вероятностной меры, которое предложил А.Н. Колмогоров и на котором основывается вся современная теория вероятностей.

Определение 1 (для случая конечного числа элементарных событий (исходов)). Пусть имеем произвольное множество $\Omega = \{\omega_i | i = \overline{1, n}, i \in N\}$ элементарных исходов эксперимента E и на этом множестве Ω определены алгебра событий F .

Пусть для $\forall A \in F$ определена числовая функция $P(A)$, которая удовлетворяет следующим аксиомам:

- 1) $0 \leq P(A) \leq 1$, т.е. $P(A) \in [0, 1]$ для $\forall A \in F$.
- 2) (Аксиома конечной адитивности). Если A и B – несовместные события, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.
- 3) $P(\Omega) = 1$ ($P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n) = 1$), это значит, вероятность появления достоверного события равна 1.

Числовая функция $P(A)$ называется вероятностью появления события $A \in F$ или вероятностной мерой события $A \in F$. (Число $P(\omega_i)$ называется вероятностью появления элементарного исхода ω_i).

Таким образом, вероятностью события A называется сумма вероятностей элементарных исходов, которые принадлежат событию A , это значит

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i).$$

Определение 2 (для случая счетного количества элементарных исходов). Пусть Ω – пространство элементарных событий эксперимента E и в пространстве Ω определена σ -алгебра событий F .

Допустим, что для $\forall A \in F$ определена числовая функция $P(A)$, которая удовлетворяет следующим аксиомам:

- 1) $0 \leq P(A) \leq 1$ для $\forall A \in F$;
- 2) $P(\Omega) = 1$ (это значит вероятность появления достоверного события равна 1);
- 3) (аксиома счетной адитивности) Если в счетной последовательности $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ события попарно несовместны (это значит $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$) и $A_i \in F, i = \overline{1, \infty}, A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, то $P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Числовую функцию $P(A)$, определенную на σ -алгебре F , называют вероятностью наступления события $A \in F$ или вероятностной мерой появления события $A \in F$.

Очевидно, что аксиомы в определении вероятности аналогичны свойствам частот.

Определение 3. Тройка (Ω, F, P) , составленная из пространства Ω элементарных исходов вероятностного эксперимента, выделенной в этом пространстве σ -алгебры F и определенной на измеримом пространстве (Ω, F) вероятностной меры P появления событий $A \in F$, называется вероятностным пространством.

Пример. Пусть эксперимент E – однократное подбрасывание монеты. Пространство элементарных событий этого эксперимента $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, где $\omega_1 = \{\text{выпадение решки}\}$. Выделим в качестве σ -алгебры событий этого эксперимента систему всех подмножеств Ω : $F = \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \Omega\}$. Определим для этих событий вероятностную меру P : $P(\emptyset) = 0$; $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{2}$; $P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{2}$; $P(\Omega) = 1$.

Легко проверить, что определенная таким образом функция $P(A)$ удовлетворяет аксиомам Колмогорова, и, следовательно, является вероятностной мерой наступления события $A \in F$. Теория вероятностей рассматривает некоторые общие методологические принципы определения вероятностей событий $A \in F$, которые входят в математическую модель вероятностного эксперимента (Ω, F, P) . Эти принципы называют методами задания или методами оценки вероятностной меры $P(A)$.

1.8 Методы задания вероятностей

а) Классический метод задания вероятности

Допустим, что нам необходимо задать вероятности элементарных событий ω вероятностного эксперимента E , пространство элементарных событий которого содержит конечное число элементов ω , это значит $\Omega = \{\omega_i | i = \overline{1, n}\}$.

В некоторых случаях можно считать, что все события ω_i пространства Ω равновозможны, к примеру, при подбрасывании игральной кости $\Omega = \{\omega_i | i = \overline{1, 6}\}$, где ω_i – выпадение i очков. События ω_i в данном случае равновозможны.

Если считать, что элементарные события ω_i равновозможны, то каждому элементарному событию $\omega_i \in \Omega$, $i = \overline{1, n}$ можно поставить в соответствие одну и ту же вероятность, это значит положить

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}.$$

Этот метод задания вероятностей носит название классического. Легко убедиться, что при таком методе задания вероятностей элементарных событий из аксиомы Колмогорова выполняются. Таким образом, функция $P(\omega_i) = \frac{1}{n}; \omega_i \in \Omega$ является вероятностной мерой.

При классическом методе задания вероятностей вероятность произвольного события $A = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n\}$ можно подсчитать на основании аксиомы 3 Колмогорова по формуле

$$P(A) = P(\omega_1 \cup \omega_2 \cup \dots \cup \omega_n) = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{m}{n}.$$

Отношение часто называют классическим определением вероятности события.

В классическом определении вероятности элементарные события ω_i , где $i = \overline{1, n}$, которые входят в событие $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$ называют исходами, благоприятствующими наступлению события A . Тогда вероятность наступления события A определяется следующим образом.

Определение. Когда все элементарные события равновозможны и число их конечно, то вероятность наступления произвольного события $A \in F$ равна отношению числа элементарных событий, благоприятствующих наступлению события A к общему числу всех элементарных событий.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

При классическом определении вероятности события необходимо составить список элементов множеств A и Ω . При решении задач комбинаторного типа список элементов m и n множеств A и Ω часто задаются формулами размещений, сочетаний и перестановок.

Пример 1. Абонент не помнит три последние цифры телефона и, зная только, что эти цифры разные, набирает их наугад. Какова вероятность того, что номер будет набран правильно?

Решение. Множество всех цифр состоит из 10 элементов. Набрать три последние цифры номера можно столькими способами, сколько существует упорядоченных трехэлементных подмножеств в десятиэлементном множестве. Таких множеств будет $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Благоприятствует событию A (цифры набраны правильно) только один исход. Поэтому вероятность события A будет равна $P(A) = \frac{1}{720}$.

Пример 2. В партии из 8 деталей 3 бракованных. Наугад выбирают 4 детали. Найти вероятность того, что среди них будут 2 бракованные и 2 стандартные.

Решение. Равновозможных исходов существует столько, сколько способов выбрать 4 произвольные детали из 8. Таких исходов будет C_8^4 . Две бракованные детали из трех можно выбрать C_3^2 способами, а две

небракованные из пяти можно выбрать C_5^2 способами. Тогда на основании принципа умножения благоприятных исходов для события A (среди 4 деталей 2 бракованные и 2 небракованные) будет C_3^2 , C_5^2 , а вероятность события A будет равна

$$P(A) = \frac{C_3^2 \cdot C_5^2}{C_8^4}.$$

Учитывая то, что $C_3^2 = \frac{A_3^2}{P_2} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$, $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$,

$$C_8^4 = \frac{A_8^4}{P_4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70, \text{ получаем } P(A) = \frac{3 \cdot 10}{70} = \frac{3}{7}.$$

б) геометрический метод задания вероятностей.

Классический метод задания вероятностей используется только для пространств Ω , которые содержат конечное количество элементарных исходов.

Пусть пространство Ω эксперимента E содержит несчетное множество элементарных событий ω . Допустим, что элементарные события ω можно трактовать как координаты точки в пространстве R^n ($n=1,2,3$), а события $A \in F$ как некоторые области этого пространства. Пусть Ω – ограниченное множество n -мерного евклидова пространства. Будем считать, что Ω , а значит и события $A \in F$, имеют конечную геометрическую меру (для $n=1$ пространство есть прямая, мера – длина; для $n=2$ пространство есть плоскость, мера – площадь; для $n=3$ пространство есть обычное трехмерное пространство, мера – объем); σ -алгебру F определим как множество всех измеримых подмножеств, которые принадлежат Ω .

Если задавать вероятности по аналогии с классическим методом, то получим $P(\omega) = 1/|\Omega| = 0$ (так как $|\Omega| = \infty$). Поэтому в этом случае приписывают вероятности не каждому ω , а некоторому множеству элементарных событий $A \in F$. При изучении аксиом Колмогорова мы указывали, что геометрические меры множеств $A \in F$ могут быть приняты за вероятностную меру этих множеств. Для этого геометрические меры нормируют, это значит принимают меру Ω за 1 ($\mu(\Omega) = 1$), а вероятность произвольного события $A \in F$ определяют пропорционально мере области A . Тогда вероятность произвольного события $A \in F$ определяется по формуле

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

где μ – мера множества.

Такой метод задания вероятностей события $A \in F$ называется геометрическим.

Пример 3. В круге радиуса R находится меньший круг радиуса r . Найти вероятность того, что точка, наугад поставленная в большом круге, попадет также и в меньший круг. Считается, что вероятность попадания

точки в круг пропорциональна площади круга и не зависит от его размещения.

Решение. Так как $\mu(\Omega) = s(\Omega) = \pi R^2$, $\mu(A) = s(A) = \pi r^2$, то по формуле получаем

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{r^2}{R^2}.$$

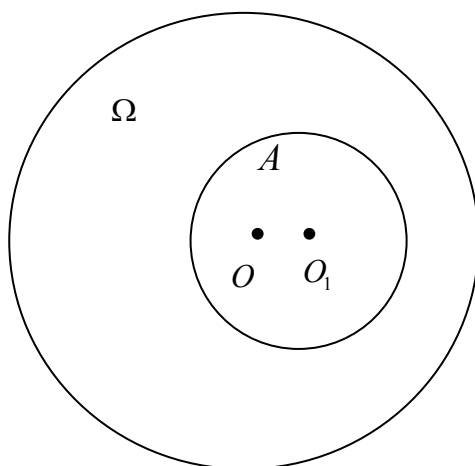
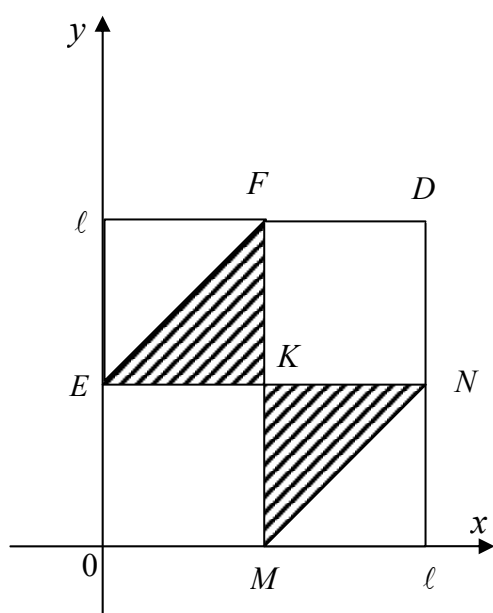


Рис. 1.6

Пример 4. Стержень длиной ℓ разломали на три части, выбирая наугад места разлома. Найти вероятность того, что из полученных трех частей можно составить треугольник.

Решение. Для того, чтобы из трех отрезков можно было построить треугольник, каждый из отрезков должен быть меньше, чем сумма двух других. Так как сумма всех трех отрезков равна ℓ , то каждый из отрезков должен быть меньше чем $\frac{\ell}{2}$.



a)

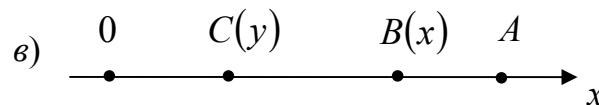
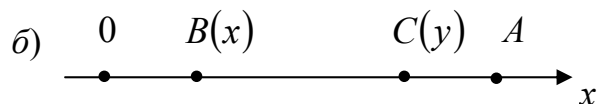


Рис. 1.7

Введем в рассмотрение прямоугольную систему координат Oxy . Координаты двух произвольных точек B и C удовлетворяют неравенствам: $0 \leq x \leq \ell$, $0 \leq y \leq \ell$. Таким образом, квадрат со стороной ℓ есть фигура, координаты точек которой содержат все возможные значения координат точек B и C .

1) Пусть точка C находится правее точки B (Рис. 1.7 б). Тогда длины отрезков BA , BC , CA должны быть меньше, чем $\frac{\ell}{2}$, это значит имеют место неравенства

$$x < \frac{\ell}{2}, y - x < \frac{\ell}{2}, \ell - y < \frac{\ell}{2},$$

или, что то же самое

$$x < \frac{\ell}{2}, y < x + \frac{\ell}{2}, y > \frac{\ell}{2}. \quad (1)$$

Координаты точек треугольника EFK удовлетворяют неравенствам (1).

2) Пусть точка C находится левее точки B (рис. 1.7 в). В этом случае имеют место неравенства

$$y < \frac{\ell}{2}, x - y < \frac{\ell}{2}, \ell - x < \frac{\ell}{2}$$

или

$$y < \frac{\ell}{2}, y > x - \frac{\ell}{2}, x > \frac{\ell}{2}. \quad (2)$$

Координаты точек треугольника KMN удовлетворяют неравенству (2). Таким образом, два заштрихованных треугольника EFK и KMN можно рассматривать как фигуру, координаты точек которой благоприятствуют событию, которое заключается в том, что из трех отрезков можно построить треугольник.

Окончательно имеем

$$P = \frac{S_{\triangle EFK} + S_{\triangle KMN}}{S_{\text{квадрата}}} = \frac{\left(\frac{\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2}{\ell^2} = \frac{\frac{\ell^2}{4}}{\ell^2} = \frac{1}{4}.$$

в) Статистический метод задания вероятностей

На практике не всегда известно число элементарных событий пространства $\Omega = \{\omega_i | i = \overline{1, n}\}$, необходимое при классическом методе задания вероятностей, также как и не всегда известны геометрические меры множеств A и Ω , необходимые для геометрического метода задания вероятностей. Статистический метод задания вероятностей не требует знания этих величин.

Пусть Ω – произвольное пространство элементарных событий эксперимента E , Продублируем эксперимент E при одинаковом комплексе условий S n раз и подсчитаем относительную частоту наступления события

$A: W_n(A) = \frac{m}{n}$. Суть статистического метода задания вероятностей состоит в том, что в качестве вероятности $P(A)$ наступления события A берут с некоторой точностью ε относительную частоту $W_n(A)$ наступления этого события, это значит $P(A) \cong W_n(A)$ (при комплексе условий S).

Существует ряд теорем, на основании которых можно рассчитать количество n дублей эксперимента для задания вероятностей наступления событий $A \in F$ с заданной точностью ε , это значит подобрать такое n , чтобы $|P(A) - W_n(A)| < \varepsilon$, причем данное неравенство по причине случайности выполняется с некоторой вероятностью p .

Статистический метод задания вероятностей в некоторых практических приложениях (измерение физических величин, исследование надежности работы аппаратуры и др.) является практически единственно возможным методом задания вероятностей.

1.9 Теоремы сложения вероятностей

Теорема 1 (теорема сложения вероятностей). Вероятность наступления суммы двух произвольных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления, это значит

$$\begin{aligned} P(A+B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Теорема сложения вероятностей является обобщением третьей аксиомы Колмагорова на случай, когда события $A \in F$, $B \in F$ не обязательно являются несовместными.

Доказательство. Для произвольных событий A и B (рис. 1.8)

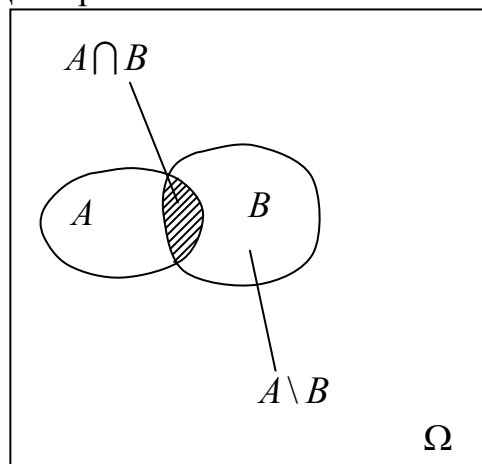


Рис. 1.8

имеют место следующие соотношения:

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A), \quad B = (A \cap B) \cup (B \setminus A).$$

События A и $B \setminus A$, а также события $A \cap B$, $B \setminus A$ несовместные, поэтому на основании третьей аксиомы Колмогорова получаем

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A), \quad P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A)$$

отнимая почленно от первого равенство второе, получаем

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) + P(B \setminus A) - P(A \cap B) - P(B \setminus A),$$

откуда имеем:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

что и надо доказать.

Если события A и B несовместные ($A \cap B = \emptyset$), то $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$ и формула (1.1) совпадает в этом случае с третьей аксиомой Колмогорова: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (1.2).

Приведем без доказательства теоремы сложения для случая суммы более двух произвольных событий.

Теорема 2. Вероятность наступления суммы трех произвольных событий определяется по формуле

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C). \quad (1.3)$$

Теорема 3. Вероятность наступления суммы n произвольных событий определяется по формуле

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_i A_j) + \sum_{i,j,k} P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n). \quad (1.4)$$

Теорема 4. Вероятность наступления события, которое противоположно событию A , равна разности между 1 и вероятностью события A , это значит

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}). \quad (1.5)$$

Доказательство. Так как $A \cup \bar{A} = \Omega$ и события A , $\bar{A}$ – несовместные, то имеем

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega),$$

откуда, учитывая, что $P(\Omega) = 1$, получаем

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \text{ или } P(\bar{A}) = 1 - P(A),$$

что и нужно было доказать.

Пример 1. В лотерее 1000 билетов. Из них на один билет падает выигрыш 30 долларов, на 10 билетов – выигрыши по 10 долларов, на 50 билетов – выигрыши по 2 доллара, на 100 билетов – по 1 доллару. Некто покупает 1 билет. Найти вероятность выиграть не менее 2 долларов.

Решение. Введем обозначения для событий:

A – выигрыш не менее 2 долларов;

A_1 – выигрыш точно 2 доллара;

A_2 – выигрыш 10 долларов;

A_3 – выигрыш 30 долларов.

Тогда $A = A_1 + A_2 + A_3$. События A_i ($i = \overline{1,3}$) несовместные, так как куплен только 1 билет. По формуле (1.2) имеем

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0,050 + 0,010 + 0,001 = 0,061.$$

1.10 Условная вероятность. Независимость событий. Теорема умножения вероятностей

Вероятность, которую имеют отдельные события, может изменяться с получением информации о ходе эксперимента. Рассмотрим пример: В области Ω произвольно выбирается точка.

Пусть A – событие, состоящее в том, что эта точка принадлежит области A . Тогда

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}.$$

Найдем теперь вероятность события A , если известно, что произошло событие B (взятая в Ω произвольно точка принадлежит области B). Здесь область B играет роль нового пространства элементарных событий, а ее часть $A \cap B$ благоприятствует наступлению события A . Вероятность наступления события A при условии, что произошло событие B , называют условной вероятностью наступления события A при условии наступления события B и обозначают $P(A/B)$ или $P_B(A)$.

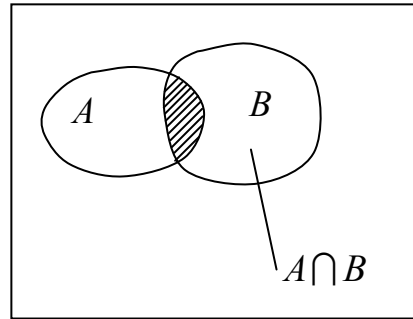


Рис. 1.9

Из рисунка 1.9 очевидно, что

$$P(A/B) = \frac{S_{A \cap B}}{S_B},$$

откуда

$$P(A/B) = \frac{S_{A \cap B}}{S_B} = \frac{S_{A \cap B} / S_{\Omega}}{S_B / S_{\Omega}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

В общем случае условная вероятность определяется с помощью полученного равенства.

Определение 1. Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство и пусть A и B – произвольные события, причем $P(B) \neq 0$. Условной вероятностью наступления события A при условии, что произошло событие B , называется число $P(A/B)$, которое определяется по формуле

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)}. \quad (1.6)$$

Аналогичным образом определяется условная вероятность наступления события B при условии, что произошло событие A

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(A)}. \quad (1.7)$$

Подчеркнем, что числа $P(A)$ и $P(A/B)$ определяют вероятность события A в двух разных пространствах Ω и $\Omega^* = B$. Новая σ -алгебра событий F^* пространства Ω^* строится как пересечение событий из F и B , а вероятности наступления событий A/B находятся по формуле (1.6). Все аксиомы, обязательные для вероятностей, имеют место для величин $P(A/B)$.

Из формул (1.6) и (1.7) непосредственно возникают формулы

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A), \quad (1.8)$$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B). \quad (1.9)$$

Тогда имеет место следующая

Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из одних событий на условную вероятность другого события, вычисленную при допущении наступления первого события:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B). \quad (1.10)$$

Теорему умножения легко обобщить на случай произведения трех событий A, B, C и случай произведения n событий $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cdot B), \quad (1.11)$$

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1} A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 A_2) \dots P(A_n/A_1 A_2 \dots A_{n-1}).$$

Понятие независимости событий тесно связано с условной вероятностью. и является одним из важнейшим в теории вероятностей.

Определение 2. Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство, а A и B – два произвольных события. Говорят, что событие A не зависит от события B , если событие B не изменяет вероятность наступления события A , т.е. если условная вероятность события A равна ее безусловной вероятности:

$$P(A/B) = P(A).$$

В противном случае, т.е. если $P(A/B) \neq P(A)$, событие A называется зависимым от события B .

Если событие A не зависит от B , то имеет место равенство

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \quad (1.13)$$

Действительно, если в правой части равенства (1.9) заменить $P(A/B)$ на $P(A)$, то приходят к формуле (1.13) и наоборот: если имеет место равенство (1.13), причем $P(B) \neq 0$, то A не зависит от B . Действительно, из равенства (1.13) следует $P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ и, следовательно, $P(A) = P(A/B)$.

Равенство (1.13) принимают в качестве эквивалентного определения независимости событий.

Определение 3. События A и B называются независимыми тогда и только тогда, если выполняется равенство (1.13).

Распространим понятие независимости на случай трех событий A, B, C . Стоит отличать события попарно независимые и независимые в совокупности.

Определение 4. Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство. Три события A, B, C ($A \in F, B \in F, C \in F$) называются попарно независимыми, если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C), P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C).$$

Определение 5. Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство. События A, B, C ($A \in F, B \in F, C \in F$) называются независимыми в совокупности, если они попарно независимы и если каждое из этих событий независимо от произведения двух других, это значит, если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C), P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C), \\ P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C). \quad (1.14)$$

Три первые равенства в формулах (1.14) свидетельствуют о том, что события A, B, C попарно независимы, а четвертое – что любое из этих событий независимо от произведения двух других.

Действительно, из четвертого равенства формул (1.14) следует

$$P(A \cdot B) \cdot P(C) = P(A \cdot C) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Независимость n событий определяется аналогичным образом.

Определение 6. События $A_i, i = \overline{1, n}$ называются независимыми в совокупности, если для произвольного k из них ($k \leq n$) имеет место соотношение

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j}). \quad (1.15)$$

Так как имеем C_n^k способов выбора k событий из n событий, то формула (1.15) дает $(2^n - n - 1)$ условий. Для $n = 3$ число условий, как было показано выше, равно 4.

Приведем без доказательства теорему о независимых событиях.

Теорема. Если события A и B независимы, то события B и $\bar{A}$ независимы, события A и $\bar{B}$ независимы, события $\bar{A}$ и $\bar{B}$ также независимы.

Пример 1. Вероятность того, что книга присутствует в фондах 1-ой библиотеки равно 0,5; 2-ой – 0,7; 3-ей – 0,4. Определить вероятность наличия книги: а) в фондах всех библиотек; б) в фондах не менее двух библиотек; в) в фондах хотя бы одной библиотеки.

Решение. Введем обозначения событий: A_i – наличие книги в фондах i -ой библиотеки ($i = 1, 2, 3$); $\bar{A}_i$ – отсутствие книги в фондах i -ой библиотеки ($i = 1, 2, 3$).

а) Пусть A – наличие книги во всех трех библиотеках. Тогда $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

Так как события A_i ($i = 1, 2, 3$) независимые, то получаем

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,4 = 0,14.$$

б) Пусть B – наличие книги в фондах не менее двух библиотек; C – наличие книги в фондах только двух библиотек.

Тогда $B = A + C = A_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3$.

Все слагаемые в этом равенстве являются несовместными событиями, поэтому на основании формулы (1.2) имеем

$$P(B) = P(A) + P(C) = P(A_1 A_2 A_3) + P(A_1 A_2 \bar{A}_3) + P(A_1 \bar{A}_2 A_3) + P(\bar{A}_1 A_2 A_3).$$

Так как события A_i ($i = 1, 2, 3$) являются независимыми в совокупности, то

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) + P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\bar{A}_3) + P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3) + \\ &+ P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,4 = \\ &= 0,14 + 0,21 + 0,06 + 0,14 = 0,63 \end{aligned}$$

в) Пусть D – наличие книги в фондах хотя бы одной библиотеки. Тогда $\bar{D}$ – отсутствие книги во всех трех библиотеках.

Таким образом,

$$\begin{aligned} P(D) &= 1 - P(\bar{D}) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 1 - 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,6 = \\ &= 1 - 0,09 = 0,91 \end{aligned}$$

Пример 2. Группа, которая состоит из 6 женщин и 3 мужчин, размещается произвольно за тремя столами по 3 человека. Найти вероятность того, что за каждым столом находятся 2 женщины и 1 мужчина.

Решение. Введем обозначения событий:

A – за каждым из трех столов находятся 2 женщины и 1 мужчина; – за i -ым столом находятся 2 женщины и 1 мужчина ($i = 1, 2, 3$).

Тогда $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. События A_i ($i = 1, 2, 3$) зависимы между собой, поэтому на основании формулы (1.11) получаем

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 A_2).$$

$$\text{Так как } P(A_1) = \frac{C_3^1 \cdot C_6^2}{C_9^3}, C_3^1 = 3, C_6^2 = \frac{A_6^2}{P_2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15, C_9^3 = \frac{A_9^3}{P_3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84,$$

$$P(A_1) = \frac{3 \cdot 15}{84} = \frac{15}{28}; \quad P(A_2 / A_1) = \frac{C_2^1 \cdot C_4^2}{C_6^3}, \quad C_2^1 = 2, \quad C_4^2 = \frac{A_4^2}{P_2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6,$$

$$C_6^3 = \frac{A_6^3}{P_3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20; \quad P(A_2 / A_1) = \frac{2 \cdot 6}{20} = 0,6 = \frac{3}{5}; \quad P(A_3 / A_1 \cdot A_2) = \frac{C_1^1 \cdot C_2^2}{C_3^3} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1;$$

$$\text{то имеем } P(A) = \frac{15}{28} \cdot \frac{3}{5} \cdot 1 = \frac{9}{28}.$$

1.11 Формула полной вероятности

Определение. Говорят, что события образуют полную группу несовместных событий, если:

1) $H_1, H_2, \dots, H_n$ попарно несовместные, т.е. $H_i \cap H_j = \emptyset$ для $i \neq j$;

2) $H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega$ – сумма событий – достоверное событие (что означает, что хотя бы одно из событий $H_1, H_2, \dots, H_n$ обязательно происходит).

3) $P(H_i) > 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Из определения и свойств вероятности следует, что вероятности событий, которые образуют полную группу, удовлетворяют условию:

$$P(H_1 + H_2 + \dots + H_n) = P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1.$$

Пусть событие A может произойти с одним из несовместных событий H_i , $i = \overline{1, n}$, которые образуют полную группу несовместных событий. События H_i , $i = \overline{1, n}$ обыкновенно называют гипотезами. Их вероятности $P(H_i)$ ($i = \overline{1, n}$) известны и, кроме того, заданы условные вероятности $P(A/H_i)$ ($i = \overline{1, n}$) наступления события A при осуществлении каждой гипотезы. Тогда вероятность наступления события A определяется с помощью следующей теоремы.

Теорема. Вероятность события A , которое может произойти совместно с одной из гипотез H_i ($i = \overline{1, n}$) равна сумме попарных произведений вероятностей каждой из этих гипотез на соответствующие им условные вероятности наступления события A :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i). \quad (1.16)$$

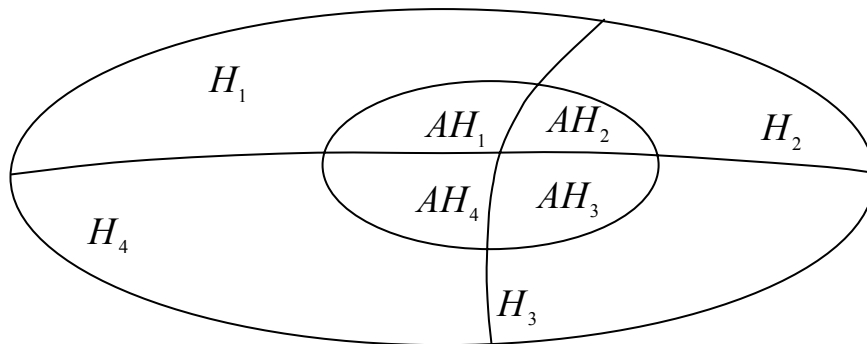


Рис. 1.10

Формула (1.16) называется формулой полной вероятности. На рис. 1.10 дана геометрическая интерпретация событий A и H_i при $i = \overline{1, 4}$.

Доказательство. Из условия и иллюстрации следует, что $A = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n$, причем $(AH_i) \cap (AH_j) = \emptyset$ при $i \neq j$. Следовательно, на основании третьей аксиомы Колмогорова и теоремы умножения вероятностей имеем

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(AH_i) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i),$$

что и требовалось доказать.

Числа $P(H_i)$ называют априорными вероятностями гипотез H_i (apriori – до эксперимента).

Пример. Электролампы изготавливают на трех заводах. Первый завод производит 45% общего количества электроламп, второй – 40%, третий –

15%. При этом продукция первого завода содержит 70% стандартных ламп, второго – 80%, третьего – 81%. В магазин поступает продукция всех трех заводов. Какова вероятность того, что купленная в магазине лампа будет стандартной.

Решение. Введем обозначения событий:

A – купленная в магазине лампа оказалась стандартной; H_i – лампа изготовлена i -м заводом ($i=1,2,3$). Так как H_i образуют полную группу несовместных событий и событие A может произойти при условии наступления одной из гипотез H_i ($i=1,2,3$), то, используя формулу полной вероятности, имеем

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i) \cdot P(A/H_i) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3) = 0,45 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,8 + 0,15 \cdot 0,81 = 0,7565$$

Пример. По самолету производится три одиночных выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,4, при втором – 0,5, при третьем – 0,7. Для вывода самолета из строя заведомо достаточно трех попаданий. При одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0,2, при двух попаданиях самолет выходит из строя с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет будет сбит.

Решение. Введем обозначения событий:

A – самолет сбит, H_i – произошло i попаданий в самолет при трех выстрелах ($i=1,2,3$); C_i – попадание в самолет при i -ом выстреле ($i=1,2,3$); $\bar{C}_i$ – промах при i -ом выстреле ($i=1,2,3$).

Тогда $H_1 = C_1 \bar{C}_2 \bar{C}_3 + \bar{C}_1 C_2 \bar{C}_3 + \bar{C}_1 \bar{C}_2 C_3$, $H_2 = C_1 C_2 \bar{C}_3 + C_1 \bar{C}_2 C_3 + \bar{C}_1 C_2 C_3$, $H_3 = C_1 C_2 C_3$. H_i ($i=1,2,3$) образуют полную группу несовместных событий. Найдем $P(H_i)$:

$$\begin{aligned} P(H_1) &= P(C_1)P(\bar{C}_2)P(\bar{C}_3) + P(\bar{C}_1)P(C_2)P(\bar{C}_3) + P(\bar{C}_1)P(\bar{C}_2)P(C_3) = \\ &= 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,36 \\ P(H_2) &= P(C_1)P(C_2)P(\bar{C}_3) + P(C_1)P(\bar{C}_2)P(C_3) + P(\bar{C}_1)P(C_2)P(C_3) = \\ &= 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,41 \\ P(H_3) &= P(C_1)P(C_2)P(C_3) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,14 \end{aligned}$$

Так как событие A может произойти только при условии наступления одной из гипотез H_i ($i=1,2,3$), то, используя формулу полной вероятности, имеем

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i) \cdot P(A/H_i) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3) = 0,36 \cdot 0,2 + 0,41 \cdot 0,6 + 0,14 \cdot 1 = 0,458$$

1.12 Формула Байесса

При использовании формулы полной вероятности мы рассмотрели вероятность наступления событий A и H_i ($i = \overline{1, n}$) до проведения эксперимента.

Поставим теперь следующую задачу. Пусть имеем группу несовместных событий (гипотез) H_i ($i = \overline{1, n}$). Известны $P(H_i)$. Проводится эксперимент, в результате которого произошло некоторое событие A . Условные вероятности появления события A по каждой из гипотез $P(A/H_i)$ были известны до проведения эксперимента. Теперь нас интересует, какие вероятности имеют гипотезы H_i ($i = \overline{1, n}$) в связи с наступлением события A . Другими словами, нас интересуют условные вероятности $P(H_i/A)$ для каждой гипотезы H_i . Ответ на поставленную задачу дает следующая теорема.

Теорема Бейесса. Вероятность гипотезы H_i , $i = \overline{1, n}$ после проведения эксперимента равна произведению вероятности этой гипотезы до проведения эксперимента на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при эксперименте, разделенному на полную вероятность этого события:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)}. \quad (1.17)$$

Числа $P(H_i/A)$ называются апостериорными вероятностями гипотез. H_i после наступления события A (aposteriori – после эксперимента). Формула (1.17) называется формулой Бейсса или формулой апостериорных гипотез.

Доказательство. На основании теоремы умножения вероятностей имеем

$$P(AH_i) = P(H_i) \cdot P(A/H_i), \quad P(AH_i) = P(A) \cdot P(H_i/A).$$

Приравнивая правые части этих равенств, получаем

$$P(H_i) \cdot P(A/H_i) = P(A) \cdot P(H_i/A),$$

откуда

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}.$$

Подставляя $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)$ в эту формулу, получаем

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)},$$

что и требовалось доказать

Пример. На склад попадает продукция трех фабрик. Продукция первой фабрики составляет 20%, второй – 46%, третьей – 34%. Средний процент нестандартных деталей для 1-ой фабрики равен 3%, для 2-ой – 2%, для 3-ей –

1%. Найти вероятность того, что произвольно взятая деталь изготовлена на 1-ой фабрике, если она оказалась нестандартной.

Решение. Введем обозначения. A – произвольно взятая деталь оказалась нестандартной; H_i – деталь изготовлена на i -ой фабрике ($i = 1, 2, 3$)

Тогда $P(H_1) = 0,2$; $P(H_2) = 0,46$; $P(H_3) = 0,34$.

События H_i ($i = 1, 2, 3$) образуют полную группу несовместных событий. По формуле Байеса находим

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A / H_i)} = \frac{0,2 \cdot 0,03}{0,2 \cdot 0,003 + 0,46 \cdot 0,02 + 0,34 \cdot 0,01} = \frac{10}{31}.$$

2. Повторение экспериментов

2.1 Схема экспериментов Бернулли. Формула Бернулли (биномиальный закон)

Понятие о схеме Бернулли. В теории вероятностей под схемой Бернулли понимают следующее. Пусть проводится n независимых экспериментов (испытаний), каждый из которых может иметь два исхода: «успех» с вероятностью p и «неудача» с вероятностью $q = 1 - p$. В каждом эксперименте вероятность осуществления исхода «успех» одна и та же и не зависит ни от номера эксперимента, ни от результатов предыдущих экспериментов.

В схему Бернулли укладываются, к примеру, такие эксперименты:

- 1) n -кратное подбрасывание одной и той же монеты;
- 2) стрельба без корректировки при неизменных условиях.

Пусть проведена серия из n экспериментов, в каждом из которых событие A может произойти с вероятностью p и не произойти с вероятностью $q = 1 - p$. Найдем вероятность того, что в такой серии из n экспериментов событие A происходит ровно k раз ($k = 0, 1, \dots, n$). Обозначим такое событие через A_n, k , а его вероятность через $P_n(A_n, k)$ или $P_n(k)$. Тогда имеет место теорема

$$P(A_n, k) = P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}. \quad (2.1)$$

Доказательство. Рассмотрим совокупность событий $B_{i_1, i_2, \dots, i_k}$, которое состоит в том, что эксперименты с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$ закончились «успехом», остальные эксперименты – «неудачей». Таких событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний из n элементов по k элементов, т.е. C_n^k .

Используя формулу (1.15) умножения вероятностей для событий, независимых в совокупности, и то, что вероятность «успеха» в одном эксперименте равна p , а вероятность «неудачи» равна q , получаем

$$P(B_{i_1, i_2, \dots, i_k}) = p^k (1-p)^{n-k}.$$

События $B_{i_1, i_2, \dots, i_k}$, $B_{j_1, j_2, \dots, j_k}$ попарно несовместные, так как очевидно, что если совокупности номеров $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ и $\{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ отличаются по составу, то и события $B_{i_1, i_2, \dots, i_k}$, $B_{j_1, j_2, \dots, j_k}$ не могут произойти одновременно.

Так как

$$A_{n,k} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_k \leq n} B_{i_1, i_2, \dots, i_k},$$

то на основании теоремы сложения вероятностей несовместных событий имеем

$$P(A_{n,k}) = P_n(k) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_k \leq n} P(B_{i_1, i_2, \dots, i_k}) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

что и требовалось доказать.

Формула (2.1) называется формулой Бернулли (биномиальным законом).

Так как события $A_{n,k}$ не пересекаются и $A_{n,0} + A_{n,1} + \dots + A_{n,n} = \Omega$, то на основании формулы бинома Ньютона получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n P_n(k) &= q^n + n \cdot p \cdot q^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} p^2 \cdot q^{n-2} + \dots + C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} + \dots + p^n = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = (p+q)^n = (p+(1-p))^n = 1, \quad \sum_{k=0}^n P_n(k) = 1 \end{aligned}$$

Замечание. Иногда требуется найти вероятность того, что в серии из n экспериментов событие A происходит k раз, где $k_1 \leq k \leq k_2$ ($k \in [k_1, k_2]$). Эта вероятность обозначается $P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$ или $P_n(k_1, k_2)$ и, очевидно, равна сумме вероятностей для $k_1 \leq k \leq k_2$, это значит

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = P_n(k_1, k_2) = C_n^{k_1} p^{k_1} (1-p)^{n-k_1} + \dots + C_n^{k_2} p^{k_2} (1-p)^{n-k_2} = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k). \quad (2.2)$$

Вероятность того, что в схеме Бернулли в серии из n экспериментов:

1) «успех» наступит не менее k раз находится по формуле:

$$P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n); \quad (2.3)$$

2) «успех» наступит менее k раз находится по формуле:

$$P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k-1);$$

3) «успех» наступит не более k раз находится по формуле:

$$P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k); \quad (2.5)$$

4) «успех» наступит более k раз находится по формуле:

$$P_n(k+1) + P_n(k+2) + \dots + P_n(n). \quad (2.6)$$

Пример. Какое событие имеет большую вероятность: выигрыш по двум билетам из четырех или по трем из пяти, если вероятность выигрыша по одному билету равна 0,01.

Решение. По формуле (2.1) находим

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot (0,01)^2 \cdot (0,99)^2 = 6 \cdot (0,01)^2 \cdot (0,99)^2$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot (0,01)^3 \cdot (0,99)^2 = 10 \cdot (0,01)^3 \cdot (0,99)^2 = 0,1 \cdot (0,01)^2 \cdot (0,99)^2.$$

Очевидно, что $P_4(2) > P_5(3)$.

Пример. Вероятность того, что произвольно взятая деталь нестандартна, равна 0,1. Найти вероятность того, что среди произвольно взятых 5 деталей не более двух нестандартных.

Решение. Пользуясь формулой (25), получаем

$$P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) = 0,9^5 \cdot C_5^1 \cdot 0,1 \cdot 0,9^4 + C_5^2 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^3 = 0,9^3(0,1 + 0,5 \cdot 0,9 + 0,9^2) = 0,729 \cdot 1,36 \approx 0,99144$$

2.2 Теорема Пуассона (закон Пуассона)

Формулу Бернулли удобно использовать для небольших n . Однако часто приходится подсчитывать $P_n(k)$ для больших n , что по формуле Бернулли очень тяжело. В случае, когда p – малое число, близкое к 0, для подсчета $P_n(k)$ используют следующую теорему.

Теорема Пуассона. Если в схеме Бернулли $p \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, так, что $n \cdot p \rightarrow \lambda$, где $\lambda > 0$, то для произвольного k ($k = 0, 1, 2, \dots$) имеет место формула

$$P_n(k) \cong \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \quad (2.7)$$

которую называют асимптотической формулой Пуассона.

Доказательство. Поставим задачу найти вероятность того, что при очень большом количестве испытаний, в каждом из которых вероятность «успеха» очень мала, «успех» наступит равно k раз.

Допустим, что $n \cdot p$ сохраняет постоянное значение, пусть $n \cdot p = \lambda$. Как будет следовать из дальнейшего это означает, что среднее число появления «успеха» в разных сериях экспериментов, это значит, при разных значениях n , остается неизменным. Используем формулу Бернулли

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k!} p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Так как $n \cdot p = \lambda$, то $p = \frac{\lambda}{n}$. Следовательно,

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Принимая во внимание, что n имеет большое значение, найдем вместо $P_n(k) \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k)$.

При этом будет найдено только приближенное значение искомой вероятности: n хоть и большое, но конечное, а при отыскании предела мы устремляем n к бесконечности. Заметим, что так как произведение $n \cdot p$ сохраняет постоянное значение, то при $n \rightarrow \infty$ вероятность $p \rightarrow 0$.

Таким образом,

$$\begin{aligned}
P_n(k) &\cong \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n(k-1))}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right) = \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\left(-\frac{n}{\lambda}\right)}\right)^{\frac{n}{\lambda}} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}
\end{aligned}$$

Выше был использован второй замечательный предел. Таким образом, получили формулу

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}.$$

Эта формула выражает закон распределения Пуассона массовых (n – большое) и редких (p – малое число) событий.

Пример. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в дороге в изделие испортится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что по дороге на базу испортятся 3 изделия.

Решение. По условию $n = 5000$, $p = 0,0002$, $k = 3$. Найдем λ
 $\lambda = n \cdot p = 5000 \cdot 0,0002 = 1$.

Тогда по формуле Пуассона искомая вероятность приближенно равна

$$P_{5000}(3) \cong \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} = \frac{e^{-1} \cdot 1^3}{3!} = \frac{1}{6e} \cong 0,06.$$

2.3 Локальная теорема Лапласа

Локальная теорема Лапласа дает асимптотическую формулу, с помощью которой можно приближенно найти вероятность успеха ровно k раз в серии из n экспериментов, если n – достаточно большое число. Доказательство локальной теоремы Лапласа довольно сложное, поэтому приведем только ее формулировку без доказательства.

Теорема (локальная теорема Лапласа). Если вероятность появления «успеха» в каждом эксперименте неизменная и отличается от 0 и 1 ($0 < p < 1$), то вероятность $P_n(k)$ того, что «успех» наступит ровно k раз приближенно равна (тем точнее, чем больше n)

$$P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}. \quad (2.8)$$

(Без доказательства)

Существуют таблицы, в которых размещены значения функции $\varphi(x)$, соответствующие положительным значениям аргумента x . Для

отрицательных значений аргумента пользуются теми же таблицами, так как $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Эта теорема была получена при $p = \frac{1}{2}$, а затем обобщена для произвольного $0 < p < 1$ Лапласом.

Пример. Стрелок произвел 30 выстрелов по мишени с вероятностью «успеха» при одном выстреле 0,3. Найти вероятность того, что стрелок 8 раз попадет в мишень.

Решение. Из условия имеем $n = 30$, $p = 0,3$, $q = 0,7$, $k = 8$. Используя локальную теорему Лапласа, получаем

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{8 - 30 \cdot 0,3}{\sqrt{30 \cdot 0,3 \cdot 0,7}} = \frac{-1}{\sqrt{6,3}} \approx -0,4$$

$$P_{30}(8) \approx \frac{1}{\sqrt{30 \cdot 0,3 \cdot 0,7}} \varphi(-0,4) = \frac{1}{\sqrt{6,3}} \varphi(0,4) \approx \frac{0,3683}{2,5} \approx 0,147.$$

(из таблицы имеем $\varphi(0,4) \cong 0,3683$)

Пример. В партии присутствуют детали двух сортов: 80% первого и 20% второго. Сколько деталей первого сорта с вероятностью 0,0967 можно ожидать среди 100 произвольно взятых деталей (выборка возвратная).

Решение. Вероятность того, что одна деталь будет высшего сорта равна 0,8. Из условия имеем

$$p = 0,8, \quad q = 0,2, \quad n = 100, \quad P_n(k) = 0,0967.$$

Если подставить эти данные в формулу Бернулли, то получаем

$$C_{100}^k \cdot (0,8)^k \cdot (0,2)^{100-k} = 0,0967.$$

Очевидно, что из этого равенства невозможно найти k . Поэтому для нахождения k используем локальную теорему Лапласа.

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

откуда $\varphi(x) \approx P_n(k) \cdot \sqrt{npq}$.

Для данных значений n , p , q , $P_n(k)$ получаем

$$\varphi(x) \approx 0,0967 \cdot \sqrt{100 \cdot 0,2 \cdot 0,8} \cong 4 \cdot 0,0967 \cong 0,3868.$$

Из таблицы значений $\varphi(x)$ находим $x = 0,25$. Значение k найдем из формулы $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $0,25 = \frac{k - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}$, откуда $k = 81$.

2.4 Интегральная теорема Лапласа

Теорема. Если вероятность p появления события A в каждом эксперименте постоянна и отличается от нуля и единицы ($0 < p < 1$), то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что «успех» в n экспериментах появится от k_1 до k_2 раз, приближенно равна интегралу

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad (2.9)$$

где $x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$. (без доказательства)

При решении задач, которые потребуют использования интегральной теоремы Лапласа, пользуются специальными таблицами, так как неопределенный интеграл $\int e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ не выражается через элементарные функции. Существуют таблицы для интеграла

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad (2.10)$$

В таблице даны значения функции $\Phi(x)$ для положительных значений x и для $x=0$ (для $x < 0$ пользуются той же таблицей (функция $\Phi(x)$ нечетная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$). В таблице приводятся значения интеграла только до $x=5$, так как для $x > 5$ можно принять $\Phi(x) = 0,5$. Для того, чтобы можно было пользоваться таблицей функции Лапласа, преобразуем соотношение (2.9) следующим образом:

$$\begin{aligned} P_n(k_1, k_2) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x'} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\ &= \Phi(x'') - \Phi(x') \end{aligned}$$

Таким образом, вероятность того, что «успех» в серии из n экспериментов появится от k_1 до k_2 раз, находится по формуле

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x'), \quad (2.11)$$

где $x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Пример. Найти вероятность того, что среди 1000 новорожденных количество мальчиков будет между числами 465 и 550. Вероятность рождения мальчика равна 0,515.

Решение. Из условия имеем $p = 0,515$, $q = 0,485$, $n = 1000$. Тогда $k_1 = 465$, $k_2 = 550$.

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{550 - 1000 \cdot 0,515}{\sqrt{1000 \cdot 0,515 \cdot 0,485}} \cong \frac{35}{15,966} \cong 2,19, \\ x' &= \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{465 - 1000 \cdot 0,515}{15,966} \cong \frac{-50}{15,966} \cong -3,13. \end{aligned}$$

Используя интегральную теорему Лапласа (формулу 2.11), получаем

$$\begin{aligned} P_{1000}(465, 550) &\approx \Phi(2,19) - \Phi(-3,13) \approx \Phi(2,19) + \Phi(3,13) \approx \\ &\approx 0,48575 + 0,49915 \approx 0,9849 \end{aligned}$$

Пример. Вероятность появления успеха в каждом из n экспериментов равна 0,9. Сколько нужно произвести экспериментов, чтобы с вероятностью

0,98 можно было ожидать, что не меньше чем 150 экспериментов дадут положительный результат?

Решение. Из условия имеем $p = 0,9$, $q = 0,1$, $k_1 = 150$, $k_2 = n$, $P_n(150, n) = 0,98$.

$$P_n(k_1, n) \approx \Phi(x'') - \Phi(x') \cong \Phi\left(\frac{n - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Подставляя сюда данные задачи, получаем

$$0,98 = \Phi\left(\frac{n - 0,9n}{\sqrt{n \cdot 0,9 \cdot 0,1}}\right) - \Phi\left(\frac{150 - 0,9n}{\sqrt{n \cdot 0,9 \cdot 0,1}}\right)$$

или

$$0,98 = \Phi\left(\frac{0,1n}{0,3\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{150 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}}\right),$$

$$0,98 = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) - \Phi\left(\frac{150 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}}\right).$$

Очевидно, что число экспериментов $n > 150$, поэтому

$$\frac{\sqrt{n}}{3} > \frac{\sqrt{150}}{3} \approx \frac{12,25}{3} \approx 4,08.$$

Так как функция Лапласа – возрастающая и $\Phi(4,08) \cong 0,499968 \approx 0,5$, то можно положить

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) \cong 0,5.$$

Следовательно

$$0,98 = 0,5 - \Phi\left(\frac{150 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}}\right).$$

Отсюда получаем

$$\Phi\left(\frac{150 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}}\right) = -0,48.$$

Из таблиц функций $\Phi(x)$ имеем $\Phi(2,06) \approx 0,48$. Учитывая, что $\Phi(x)$ – нечетная функция, получаем

$$\frac{150 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}} = -2,06,$$

откуда имеем $500 - 3n = -2,06\sqrt{n}$, $3n - 2,06\sqrt{n} - 500 = 0$.

Обозначим $\sqrt{n} = u$. Тогда имеем $3u^2 - 2,06u - 500 = 0$. Решая последнее уравнение, приближенно получаем $u = 13,3$. Тогда $n = u^2 = 13,3^2 \approx 177$.

2.5 Вероятность отклонения относительной частоты от неизменной вероятности p появления «успеха» в серии из n независимых испытаний

Пусть проводится серия из n экспериментов, p – вероятность появления успеха в одном эксперименте, $\frac{m}{n}$ – относительная частота появления успеха в серии из n экспериментов. Поставим задачу найти вероятность того, что отклонение относительной частоты $\frac{m}{n}$ от неизменной вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного числа $\varepsilon > 0$. Другими словами, найдем вероятность осуществления неравенства

$$\left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \varepsilon. \quad (*)$$

Эту вероятность обозначим $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right)$. Запишем неравенство (*) в виде

$$-\varepsilon \leq \frac{m}{n} - p \leq \varepsilon \text{ или } -\varepsilon \leq \frac{m - np}{n} \leq \varepsilon.$$

Умножая все элементы неравенства на положительный множитель $\sqrt{\frac{n}{pq}}$, получаем неравенство, эквивалентное исходному

$$-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}. \quad (**)$$

Используя теорему Лапласа и учитывая, что в данном случае $x' = -\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}$, $x'' = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}$, имеем

$$P\left(-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Наконец, заменяя неравенство (**) эквивалентным ему исходным неравенством, окончательно получаем

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \quad (2.12)$$

Пример. Вероятность «успеха» при одном выстреле из винтовки равна 0,3. Какова вероятность того, что при 500 выстрелах относительная частота «успеха» отклонится от вероятности p не более чем на 0,04 (по абсолютной величине).

Решение. Из условия имеем $p = 0,3$, $n = 500$, $q = 0,7$, $\varepsilon = 0,04$. Используя формулу (2.12) получаем

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{m}{500} - 0,3\right| \leq 0,04\right) &\approx 2\Phi\left(0,04 \sqrt{\frac{500}{0,3 \cdot 0,7}}\right) \cong 2\Phi(0,04 \cdot 49) = 2\Phi(1,96) \cong \\ &\cong 2 \cdot 0,475 \cong 0,95. \end{aligned}$$

Пример. Вероятность появления успеха в каждом из n независимых испытаний равна 0,2. Найти число n экспериментов, при котором с вероятностью 0,9876 можно ожидать, что относительная частота появления успеха в серии из n экспериментов отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,04.

Решение. Из условия имеем $p = 0,2$; $q = 0,8$; $\varepsilon = 0,04$. Используя формулу (2.12), получаем

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \cong 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right), \quad 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0,9876, \quad \Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0,4938.$$

Из таблиц функции $\Phi(x)$ находим, что $\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} = 2,5$, откуда

$$\sqrt{n} = \frac{2,5\sqrt{pq}}{\varepsilon} = \frac{2,5\sqrt{0,2 \cdot 0,8}}{0,04} = \frac{2,5 \cdot 0,4}{0,04} = 25, \quad n = 625.$$

2.6 Наивероятнейшее число «успехов» в схеме Бернулли

Определение. Наивероятнейшим числом «успехов» в схеме Бернулли из n экспериментов называется такое число k_0 ($0 \leq k_0 \leq n$), что вероятность $P_n(k_0)$ наибольшая среди всех вероятностей $P_n(k)$ ($k = 0, 1, \dots, n$).

Теорема. Наивероятнейшее число k_0 «успехов» в схеме Бернулли удовлетворяет неравенству

$$np - (1 - p) \leq k_0 \leq np + p. \quad (2.13)$$

Следствие. Число k_0 может принимать не более двух значений, что следует из того, что в неравенстве $np - (1 - p) \leq k_0 \leq np + p$, т.е. $np + p - 1 \leq k_0 \leq np + p$ число k_0 находится на отрезке длиной 1.

Доказательство. Рассмотрим отношение $\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)}$:

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{C_n^{k+1} \cdot p^{k+1} \cdot q^{n-k-1}}{C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}} = \frac{n(n-1) \dots (n-k) \cdot k! \cdot p}{n(n-1) \dots (n-k+1)(k+1)! \cdot q} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q},$$

т.е. $\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{(n-k)p}{(k+1)q}.$

Рассмотрим следующие случаи

$$1) \frac{(n-k)p}{(k+1)q} > 1.$$

Тогда $P_n(k+1) > P_n(k)$. Имеем $np - kp > kq + q$, откуда $np - q > k \cdot (p + q)$, так как $p + q = 1$, то $k < np - q$.

Таким образом, пока целое число k , возрастая, остается меньше чем $np - q$, возрастают и соответствующие вероятности $P_n(k)$.

$$2) \frac{(n-k)p}{(k+1)q} = 1.$$

Тогда $P_n(k+1) = P_n(k)$ или $k = np - q$.

Таким образом, если целое число k равно числу (конечно, целому) $np - q$, то вероятности того, что «успех» появится ровно k или $(k+1)$ раз в серии из n экспериментов, равны между собой.

Так как числа p и q обычно дробные, то число $np - q$ только в редких случаях будет целым. В этом смысле рассмотренный случай является исключительным.

$$3) \frac{(n-k)p}{(k+1)q} < 1.$$

Тогда $P_n(k+1) < P_n(k)$ или $k > np - q$.

Таким образом, когда целое число k превышает число $np - q$, то с ростом k соответствующие вероятности $P_n(k)$ уменьшаются до $P_n(n)$.

Из определения наивероятнейшего числа k_0 следует, что при $k = k_0$ $P_n(k_0)$ достигает наибольшего значения, а при $k > k_0$ $P_n(k)$ убывает.

Если $np - q$ не является целым числом, то эти соображения позволяют написать неравенство

$$P_n(k_0 + 1) < P_n(k_0).$$

При этом $k_0 > np - q$, как было установлено ранее. Если же $k_0 = np - q$, то $P_n(k_0 + 1) = P_n(k_0)$. Таким образом, в общем случае имеет место неравенство

$$P_n(k_0 + 1) \leq P_n(k_0),$$

из которой следует неравенство $k_0 \geq np - q$. С помощью аналогичных рассуждений можно показать, что из неравенства

$$P_n(k_0 - 1) < P_n(k_0)$$

на основании формулы для отношения $\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)}$ следует неравенство $k_0 < np + p$.

Таким образом, получаем

$$np - q \leq k_0 \leq np + p,$$

что и требовалось доказать.

Пример. По мишени стреляют 21 раз. Вероятность «успеха» при одном выстреле равна 0,25. Определить наивероятнейшее число «успехов».

Решение. Из условия имеем $n = 21$, $p = 0,25$. Используя неравенство $np - q \leq k_0 \leq np + p$ при данных значениях n , p , q получаем $21 \cdot 0,25 - 0,75 \leq k_0 \leq 21 \cdot 0,25 + 0,25$, т.е. $4,5 \leq k_0 \leq 5,5$, откуда $k_0 = 5$.

Пример. Сколько раз надо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее число выпадений двойки было равно 32?

Решение. Из условия имеем $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$, $k_0 = 32$. Из неравенства $np - q \leq k_0 \leq np + p$ следует, что $\frac{k_0 - p}{p} \leq n \leq \frac{k_0 + q}{p}$, откуда имеем $\frac{32 - \frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} \leq n \leq \frac{32 + \frac{5}{6}}{\frac{1}{6}}$, т.е. $191 \leq n \leq 197$.

Таким образом, $n = 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197$.

3. Случайные величины. Функции распределения. Плотность распределения

3.1 Понятие случайной величины для дискретных вероятностных пространств и в общем случае

В многочисленных инженерно-технических задачах и приложениях математики с каждым элементарным исходом $\omega_i \in \Omega$ связано определенное действительное число $p(\omega_i) = x_i$, которое зависит от исхода ω_i (количество элементарных исходов конечно).

Определение 1. Случайной величиной X называется действительная числовая функция, определенная на пространстве Ω элементарных событий $\omega: X = X(\omega)$, $\omega \in \Omega \left(\Omega \xrightarrow{X(\omega)} R \right)$.

Для дискретных вероятностных пространств случайной величиной мы будем называть произвольную функцию от ω , а в общем случае на функцию $X(\omega)$ будут накладываться дополнительные условия.

Пример. Пусть эксперимент E заключается в двукратном подбрасывании симметричной монеты. Тогда пространство элементарных событий Ω имеет вид:

$$\Omega = (\omega_i, i = \overline{1,4}) = ((\Gamma\Gamma), (\Gamma p), (p\Gamma), (pp)).$$

Рассмотрим случайную величину $X(\omega)$ – число выпадений герба, определенную на этом пространстве. Множество значений этой случайной величины имеет вид $X(\omega) = (0, 1, 2)$. Запишем этот результат в виде таблицы

Ω	(p, p)	(Γ, p)	(Γ, Γ)
$X(\omega)$	0	1	2

Можно привести другие примеры случайных величин:

- 1) Количество вызовов на телефонной станции на протяжении определенного промежутка времени.
- 2) Ошибка измерения какой-нибудь величины.
- 3) Число элементарных частиц, которые регистрирует прибор на протяжении определенного времени.

Отличают два основных типа случайных величин: дискретные и непрерывно распределенные. Дискретная величина $X = X(\omega)$ в зависимости от элементарных исходов принимает конечное или счетное число разных значений x с соответствующими вероятностями

$$P_x(x) = P(X = x).$$

(Здесь символом $(X = x)$ обозначено событие, состоящее в том, что случайная величина X примет значение x , это значит, $(X = x) = (\omega : X(\omega) = x)$. Вероятность события $(x' < X < x'')$, состоящего в том, что случайная величина X принимает одно из значений x , которые находятся в границах $x' \leq x \leq x''$, равна

$$P(x' \leq X \leq x'') = \sum_{x'}^{x''} P_x(x).$$

(суммирование осуществляется по конечному или счетному числу значений x , которые может принимать дискретная случайная величина X). $P_x(x)$, как функция всех возможных значений x случайной величины X называется распределением вероятностей этой величины.

Приведем определение случайной величины в общем случае.

Определение 2. Пусть (Ω, F, P) – произвольное вероятностное пространство. Случайной величиной X назовем действительную функцию $X = X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, такую, что для произвольного действительного x

$$\{\omega : X(\omega) < x\} \in F. \quad (3.1)$$

Если в F включаются все подмножества Ω , то (3.1) очевидно выполняется. Событие в (3.1) более коротко записывают в виде $(X < x)$. Так как операции над событиями из F не выводят за границы F , то из (3.1) следует, что

$$\begin{aligned} (X \geq x) &= (\overline{X < x}) \in F, \\ (x_1 \leq X < x_2) &= (X < x_2) \setminus (X < x_1) \in F, \\ (X = x) &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(x \leq X < x + \frac{1}{n} \right) \in F. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Таким образом, определены вероятности этих событий:

$$P(X \geq x) = 1 - P(X < x), \quad P(x_1 \leq X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1),$$

$$P(X = x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(x \leq X < x + \frac{1}{n}\right). \quad (3.3)$$

3.2 Функция распределения и ее свойства

Определение. Числовая функция $F_x(x) = P(X < x)$, $x \in R$ называется функцией распределения случайной величины X .

$$F_x(x) = P(X < x) = P(X \in (-\infty, x)). \quad (3.4)$$

В дальнейшем будем просто писать $F_x(x) = P(X < x)$. Если рассматривать случайную величину X , как случайную точку X на оси Ox ,

то функция распределения $F(x)$ есть вероятность того, что случайная точка X в результате эксперимента попадет левее, чем точка x .

Функцию $F(x)$ можно определить для произвольной случайной величины X .

Приведем свойства функции распределения:

- 1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$ для $\forall x \in R$;
- 2) $F_X(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$, $F_X(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$;
- 3) $P(X \geq x) = 1 - F_X(x)$.

Доказательство. На основании первого из равенств (3.2) получаем

$$P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - F_X(x).$$

- 4) $P(x_1 \leq X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$.

Доказательство. На основании второго из равенств (3.2) и аксиомы 3 Колмогорова получаем:

$$P(X < x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) + P(X < x_1),$$

откуда имеем

$$F_X(x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) + F_X(x_1) \text{ или } P(x_1 \leq X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1),$$

что и требовалось доказать.

- 5) $F_X(x)$ – неубывающая на всей числовой оси, т.е. $F_X(x_2) \geq F_X(x_1)$ для $x_2 > x_1$.

Доказательство. Имеем $P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$, откуда и следует $F(x_2) \geq F(x_1)$.

- 6) $P(X = x_0) = F_X(x_0 + 0) - F_X(x_0)$
 $F_X(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} F_X(x)$.

Доказательство. Из формул (3.3), (3.6) имеем

$$F(X = x_0) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(F_X \left(x_0 + \frac{1}{n} \right) - F_X(x_0) \right) = F_X(x_0 + 0) - F_X(x_0).$$

Если функция $F(x)$ имеет разрыв в некоторой точке x_0 , то величина скачка равна вероятности события $(X = x_0)$, т.е.

$$P(X = x_0) = F(x_0 + 0) - F(x_0 - 0).$$

- 7) Функция $F_X(x)$ непрерывна слева для $\forall x_0 \in (-\infty, \infty)$, т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F_X(x) = F_X(x_0)$, или $F_X(x_0 - 0) = F_X(x_0)$.

3.3 Дискретные случайные величины. Закон распределения. Функция распределения для дискретных случайных величин

Множество значений $X(\omega)$, которые принимает случайная величина X , может быть конечным, счетным или несчетным.

Определение 1. Если множество возможных значений $X(\Omega)$ случайной величины X конечное или счетное, то такая случайная величина называется дискретной.

Определение 2. Законом распределения вероятностей (законом распределения) дискретной случайной величины X называется соответствие между возможными значениями случайной величины X и их вероятностями, который можно задать в виде таблицы, это значит каждому возможному значению x_i поставлено в соответствие некоторое число $p_i > 0$, которое называется вероятностью этого значения. Если $X(\Omega)$ конечное, то $\sum_{i=1}^n p_i = 1$; если $X(\Omega)$ счетное, то $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Закон распределения, заданный в виде таблицы, имеет вид

$X(\Omega)$	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$

Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан также аналитически или графически (в прямоугольной системе координат отмечаются точки (x_i, p_i) , а потом соединяются отрезками – получают полигон распределения).

Если задан закон распределения случайной величины X , то функция распределения $F(x)$ может быть задана по формуле

$$F_X(x) = P(X < x).$$

Для заданного x вероятность события $(X < x)$ равна сумме вероятностей p_i которые соответствуют всем значениям x_i , меньшим, чем x .

Таким образом, используя данные закона распределения, получают формулу для функции распределения дискретной случайной величины

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \min_i x_i \\ \sum_{i: x_i < x} p_i, & x < \min_i x_i \end{cases}, \quad (3.8)$$

где суммирование идет по тем индексам i , для которых имеет место условие $x_i < x$.

Из свойств 1) и 6) функции распределения следует, что функция распределения $F(x)$ дискретной случайной величины терпит разрывы 1-ого рода (скачки) при переходе через точки ее возможных значений $x_1, x_2, \dots, x_n$, причем величина скачка равна вероятности p_i соответствующего значения x_i . На полуинтервалах $(x_i, x_{i+1}]$ функция $F_X(x)$ сохраняет неизменное значение.

Пример 1. Стрелок произвел 3 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4. За каждое попадание стрелку засчитывают 2 очка. Найти закон распределения числа выбитых очков, найти $F_X(x)$ и построить ее график.

Решение. Пусть случайная величина X – число выбитых очков, A_i – попадание при i -ом выстреле ($i=1,2,3$), $\bar{A}_i$ – промах при i -ом выстреле

($i=1,2,3$). Вероятности событий $(X=0)$, $(X=2)$, $(X=4)$, $(X=6)$ можно найти по формуле Бернулли.

$$(X=0)=\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3, P(X=0)=P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3)=P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3)=0,6^3=0,216$$

$$\text{или } P(X=0)=P_3(0)=0,6^3=0,216,$$

$$P(X=2)=P_3(1)=C_3^1 \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^2=1,2 \cdot 0,36=0,432,$$

$$P(X=4)=P_3(2)=C_3^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6=1,8 \cdot 0,16=0,288,$$

$$P(X=6)=P_3(3)=C_3^3 \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^0=1,4^3=0,064.$$

Таким образом, закон распределения записываем в виде таблицы

$X(\Omega)$	0	2	4	6
$P(X=x_i)$	0,216	0,432	0,288	0,064

Очевидно, что $\sum p_i = 0,216 + 0,432 + 0,288 + 0,064 = 1$. Найдем функцию распределения $F_X(x)$.

$$\text{Если } x \leq 0, \text{ то } F_X(x) = \sum_{x_i: x_i < x} p_i = 0.$$

$$\text{Если } 0 < x \leq 2, \text{ то } F_X(x) = \sum_{x_i: x_i < x} p_i = P(X=0) = 0,216.$$

$$\text{Если } 2 < x \leq 4, \text{ то } F_X(x) = \sum_{x_i: x_i < x} p_i = P(X=0) + P(X=2) = 0,216 + 0,432 = 0,648.$$

$$\text{Если } 4 < x \leq 6, \text{ то } F_X(x) = \sum_{x_i: x_i < x} p_i = P(X=0) + P(X=2) + P(X=4) = 0,648 + 0,288 = 0,936.$$

$$\text{Если } x > 6, \text{ то } F_X(x) = \sum_{x_i: x_i < x} p_i = P(X=0) + P(X=2) + P(X=4) + P(X=6) = 0,936 + 0,064 = 1.$$

Таким образом, для $F_X(x)$ получили выражение

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0,216, & 0 < x \leq 2 \\ 0,648, & 2 < x \leq 4 \\ 0,936, & 4 < x \leq 6 \\ 1, & x > 6 \end{cases}$$

Построим график функции распределения

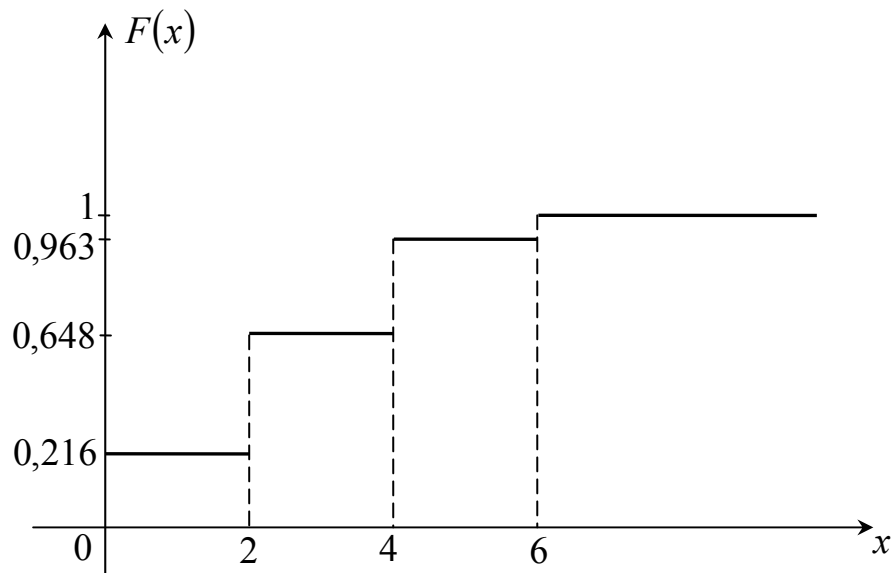


Рис. 3.1

Пример 2. Вероятность того, что необходимая студенту книга имеется в библиотеке, равна 0,3. Найти закон распределения числа библиотек, которые посетит студент в поисках книги, если в городе 4 библиотеки. Найти $F(x)$ и построить ее график.

Решение. Пусть случайная величина X – количество библиотек, которые посетит студент в поисках книги, A_i – наличие книги в i -ой библиотеке ($i = \overline{1,4}$), $\bar{A}_i$ – отсутствие книги в i -ой библиотеке ($i = \overline{1,4}$).

Тогда имеем

$$\begin{aligned} (X=1) &= A_1, P(X=1) = P(A_1) = 0,3; \\ (X=2) &= \bar{A}_1 \cdot A_2, P(X=2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) = 0,7 \cdot 0,3 = 0,21; \\ (X=3) &= \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3, P(X=3) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3) = 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,147; \\ (X=4) &= \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3, P(X=4) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 0,7^3 = 0,343. \end{aligned}$$

Закон распределения записываем в виде таблицы.

$X(\Omega)$	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	0,3	0,21	0,147	0,343

Очевидно, что $\sum_{i=1}^n p_i = 0,3 + 0,21 + 0,147 + 0,343 = 1$. Найдем функцию распределения $F_X(x)$.

$$\text{Если } x \leq 1, \text{ то } F_X(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i = 0.$$

$$\text{Если } 1 < x \leq 2, \text{ то } F_X(x) = \sum_{x_i < x} p_i = P(X=1) = 0,3.$$

$$\text{Если } 2 < x \leq 3, \text{ то } F_X(x) = \sum_{x_i < x} p_i = P(X=1) + P(X=2) = 0,3 + 0,21 = 0,51.$$

Если $3 < x \leq 4$, то $F_X(x) = \sum_{x_i < x} p_i = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0,51 + 0,147 = 0,657$.

Если $x > 4$, то $F_X(x) = \sum_{x_i < x} p_i = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 0,657 + 0,343 = 1$.

Для $F_X(x)$ получили выражение

График функций $F_X(x)$ имеет вид

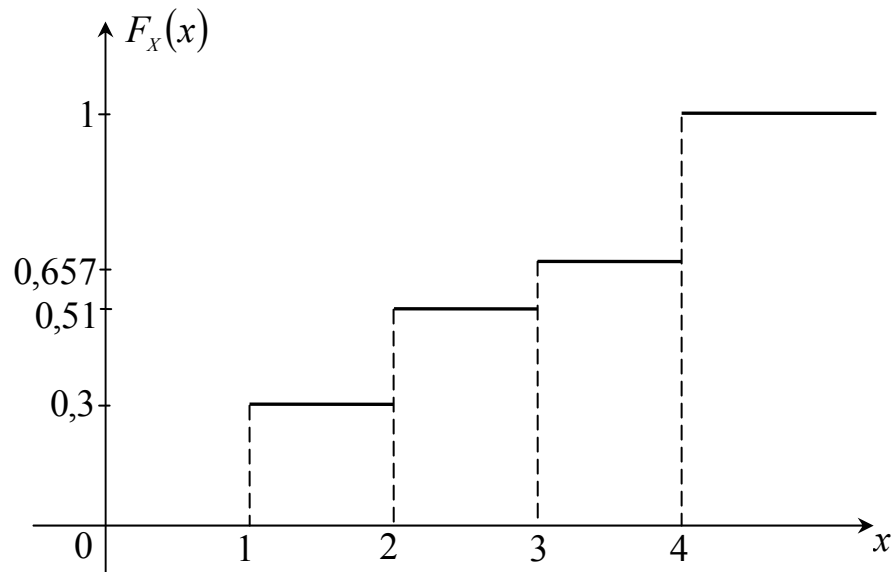


Рис. 3.2

3.4 Непрерывные случайные величины. Плотность распределения вероятностей и ее свойства

Определение 1. Случайная величина X называется непрерывной, если она может принимать все значения из некоторого интервала или системы интервалов на числовой оси.

Так как значения непрерывной случайной величины X целиком заполняют некоторый интервал, то их невозможно пронумеровать.

Исходя из свойств функции $F_X(x) = P(X < x)$, получаем график этой функции в случае, когда X – непрерывная случайная величина.

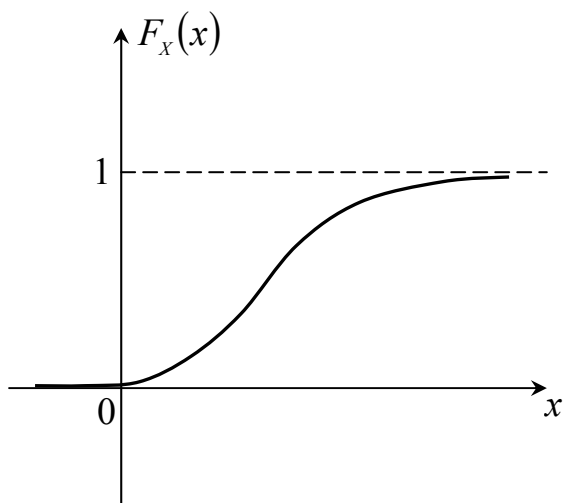


Рис. 3.3

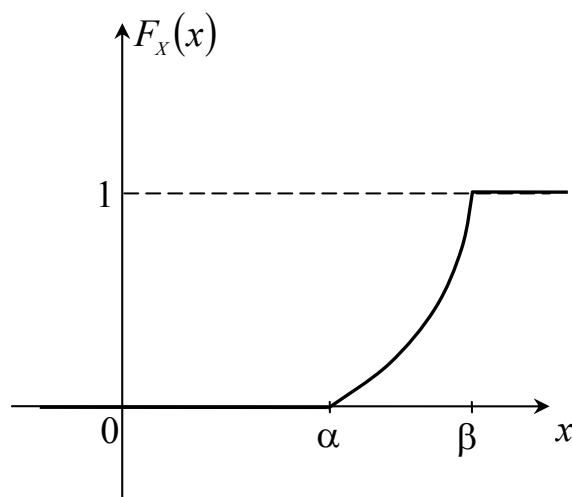


Рис. 3.4

Вероятность, которая соответствует такому множеству значений, распределена некоторым образом на этом множестве и имеет смысл говорить о плотности распределения вероятностей.

Известно, что плотность в механике, физике и т.п. имеет свойство: интеграл от плотности, взятый по некоторой области, равен общей массе, энергии и т.п.

Приведем еще одно определение непрерывной случайной величины.

Определение 2. Случайная величина X называется непрерывной, если существует такая неотрицательная интегрируемая для $x \in (-\infty, \infty)$ функция $f(x)$, что для произвольного x имеет место равенство

$$P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

Учитывая, что $F_X(x) = P(X < x)$, имеем

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (3.9)$$

Функция $f(x)$ называется плотностью распределения вероятностей.

Дифференцируя равенство (3.9), получаем

$$F'_X(x) = f(x). \quad (3.10)$$

Таким образом, соотношения (3.9) и (3.10) позволяют находить одну функцию, зная другую. Исходя из формул (3.9) и (3.10), функции $F_X(x)$, $f(x)$ называют соответственно интегральной и дифференциальной функциями распределения.

Непрерывные случайные величины имеют ряд специфических свойств.

Кроме общих свойств 1)–7) (п. 3.2), для непрерывных случайных величин имеют место следующие свойства:

- 1) $F_X(x)$ – непрерывная функция,
- 2) $P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx,$ (3.11)

Доказательство. Известно, что

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx =$$

$$= \int_a^{-\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

3) $P(X=a)=0$, т.е. вероятность того, что непрерывная случайная величина примет какое-нибудь конкретное значение, равна нулю.

Доказательство. Переходя в равенстве $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$ к пределу при $b \rightarrow a$, получаем $P(X=a)=0$.

Отсюда очевидно, что события $(a \leq X < b)$, $(a \leq X \leq b)$, $(a < X < b)$ имеют одинаковую вероятность:

$$P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx. \quad (3.12)$$

$$4) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \quad (3.13)$$

Доказательство. Так как $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$, а $F_X(\infty)=1$, то отсюда имеем $F_X(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

5) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, т.е. предел плотности вероятности при $x \rightarrow \pm\infty$ равен 0, так как в противном случае $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ был бы расходящимся, что противоречило бы свойству 4).

Замечание. Если все возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат отрезку $[a, b]$, то имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

Пример 1. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ ax^2, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Найти 1) коэффициент a ; 2) плотность распределения вероятностей $f(x)$; 3) $P(0,25 < X < 0,5)$.

Решение. Так как $F(x)$ – непрерывная, то должны выполняться условия

$$\lim_{x \rightarrow +0} F(x) = \lim_{x \rightarrow -0} F(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} F(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} F(x) = \lim_{x \rightarrow -0} F(x) \text{ при } \forall a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} ax^2 = a; \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} F(x) = 1, \text{ откуда получаем } a = 1, \text{ следовательно,}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 1. \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{Так как } f(x) = F'(x), \text{ то получаем } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2x, & 0 < x \leq 1. \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Графики $F(x)$ и $f(x)$ изображены на рисунках 3.5 и 3.6.

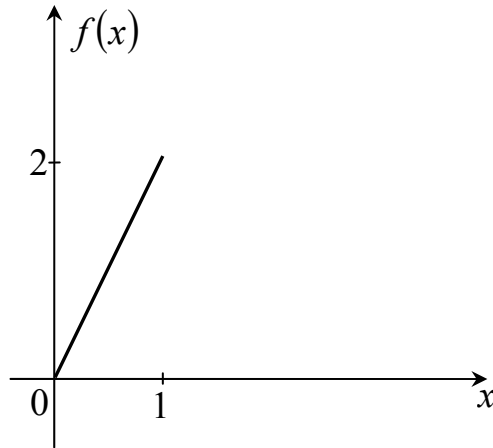


Рис. 3.5

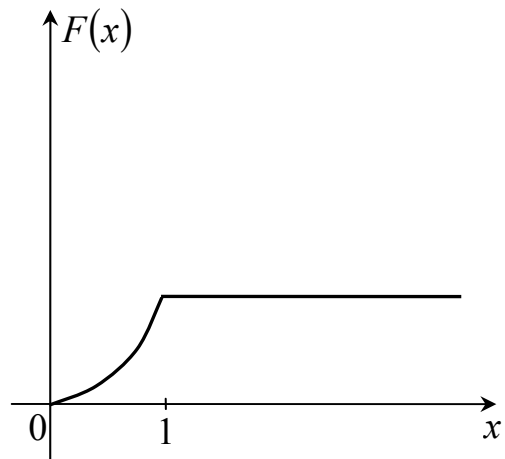


Рис. 3.6

Пример 2. Плотность $f(x)$ вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Найти $F(x)$ и построить ее график.

Решение. Найдем $F(x)$ для $x \leq 1$. Для таких x $f(x) = 0$, поэтому

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0.$$

Для $x \in (1, 2]$ имеем

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^1 0 \cdot dx + \int_1^x \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) \Big|_1^x = \frac{1}{2}(x^2 - x).$$

Для $x \in (2, \infty)$ имеем

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^2 0 dx + \int_1^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx + \int_2^x 0 dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) \Big|_1^2 = 2 - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Таким образом

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x^2 - x), & x \in (1, 2] \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

График $F(x)$ показан на рис. 3.7.

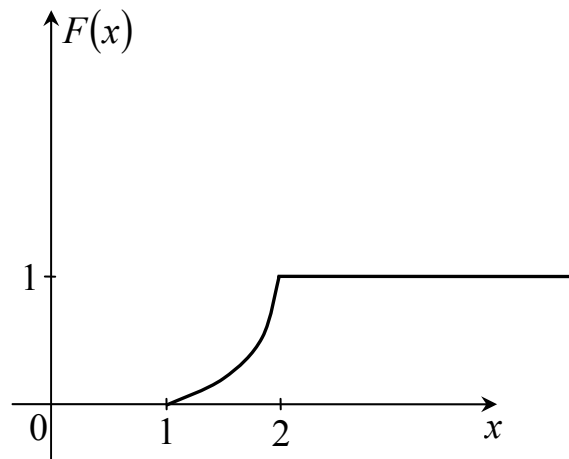


Рис. 3.7

4. Числовые характеристики случайных величин

4.1 Математическое ожидание дискретных и непрерывных случайных величин

Если распределение случайной величины известно, то его анализ позволяет получить достаточно полное представление о свойствах и особенностях поведения случайной величины в массовых экспериментах.

На практике, однако, в ряде случаев достаточно знать только некоторые свойства случайных величин:

- 1) их «среднее» значение, вокруг которого группируются другие значения;
- 2) степень «рассеивания» этих отдельных значений в отношении центра их группирования.

Эти свойства можно описать в количественной форме с помощью разных числовых характеристик, важнейшими из которых являются математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратичное отклонение, начальные и центральные моменты разных порядков.

Определение 1. Математическое ожидание дискретной случайной величины называют суммой произведений всех ее возможных значений на их вероятности. Если множество возможных значений дискретной случайной величины конечно, то формула имеет вид

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i. \quad (4.1)$$

Если множество возможных значений счетное, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i, \quad (4.2)$$

причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Вычисленное значение математического ожидания часто обозначают через m_x .

Обобщим понятие математического ожидания на случай непрерывной случайной величины. Пусть $f(x)$ – плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины $X \in [a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на интервалы длиной $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_n$.

В каждом интервале выберем точки $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Элемент вероятности $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ есть величина, которая приближенно равна вероятности попадания случайной величины на интервал длиной Δx_i .

Рассмотрим сумму $\sum_{i=1}^n \xi_i \cdot f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$. Эта сумма приближенно выражает математическое ожидание случайной величины X . Тогда, очевидно, в

$$M(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b x \cdot f(x) dx, \quad M(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx. \quad (4.3)$$

Если возможные значения случайной величины принадлежат всей числовой оси, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx, \quad (4.4)$$

причем интеграл в правой части равенства (4.4) сходится абсолютно, иначе случайная величина X не имеет математического ожидания.

4.2 Основные свойства математического ожидания

Приведем значения суммы $X + Y$ и произведения $X \cdot Y$ двух случайных величин X и только для дискретных случайных величин.

Определение 1. Пусть X, Y – дискретные случайные величины, заданные своими законами распределения.

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$

Y	y_1	y_2	$\dots$	y_i	$\dots$
P'	p'_1	p'_2	$\dots$	p'_i	$\dots$

Суммой $X + Y$ двух случайных величин X, Y называется случайная величина, множество возможных значений которой есть множество всевозможных сумм вида $x_i + y_j$, т.е. множество

$$X + Y = \{x_i + y_j; i = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots\}.$$

Произведением $X \cdot Y$ двух случайных величин X, Y называется случайная величина, множество возможных значений которой есть множество всевозможных произведений вида $x_i y_j$, т.е. множество

$$X \cdot Y = \{x_i \cdot y_j; i = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots\}.$$

Эти понятия можно переформулировать для случая произвольного конечного числа случайных величин.

Определения суммы $X + Y$ и произведения $X \cdot Y$ для дискретных случайных величин являются ключевыми при определении суммы и произведений случайных величин в общем случае. так как случайные величины $X + Y$ ($X \cdot Y$) в общем случае определяют как предел дискретных случайных величин $X_n + Y_n$ ($X_n \cdot Y_n$) при $n \rightarrow \infty$. (Точное рассмотрение этих математических понятий не проводится в данном пособии).

Определение 2. Случайные величины X и Y называются независимыми, если для произвольных чисел x и y имеет место равенство

$$P(X < x; Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y),$$

где $P(X < x; Y < y)$ – вероятность одновременного появления события, состоящего в том, что случайная величина X принимает значения из полуинтервала $(-\infty, x)$, а случайная величина Y – из полуинтервала $(-\infty, y)$.

Можно показать, что для дискретных случайных величин X и Y определение независимости можно переформулировать так: для произвольного x_i из множества возможных значений случайной величины X и произвольного y_j из множества возможных значений случайной величины Y имеет место равенство

$$P(X = x_i; Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j).$$

Рассмотрим основные свойства математического ожидания.

Доказательство основных свойств приведем только для дискретных случайных величин.

1) $M(C) = C$. ($C = \text{const}$).

Доказательство. Будем рассматривать константу C , как дискретную случайную величину, которая имеет одно возможное значение C и принимает его с вероятностью 1.

Тогда $M(C) = C \cdot 1 = C$.

2) $M(CX) = CM(X)$. ($C = \text{const}$)

Доказательство. Определим произведение константы C на дискретную случайную величину X , как дискретную случайную величину CX , возможные значения которой равны произведению C на возможные значения x , а их вероятности равны вероятностям соответствующих возможных значений X .

Если случайная величина имеет следующий закон распределения.

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

то закон распределения для CX имеет вид

CX	cx_1	cx_2	$\dots$	cx_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Тогда, используя формулу (4.1), получаем

$$M(CX) = cx_1 \cdot p_1 + cx_2 \cdot p_2 + \dots + cx_n \cdot p_n = c(x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n) = CM(X).$$

3) $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.

Доказательство. Проведем доказательство для $n = 2$. Пусть случайные величины X и Y заданы своими законами распределения

X	x_1	x_2
P	p_1	p_2

Y	y_1	y_2
P'	p'_1	p'_2

Рассмотрим случайную величину $X + Y$ и составим таблицу ее возможных значений (для этого для каждого возможного значения X

приведем возможное значение Y). Получим значения $x_1 + y_1, x_1 + y_2, x_2 + y_1, x_2 + y_2$, вероятности которых обозначим через $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$.

$X + Y$	$x_1 + y_1$	$x_1 + y_2$	$x_2 + y_1$	$x_2 + y_2$
p_{ij}	p_{11}	p_{12}	p_{21}	p_{22}

Тогда по формуле (4.1) имеем

$$\begin{aligned} M(X + Y) &= (x_1 + y_1)p_{11} + (x_1 + y_2)p_{12} + (x_2 + y_1)p_{21} + (x_2 + y_2)p_{22} = \\ &= x_1(p_{11} + p_{12}) + x_2(p_{21} + p_{22}) + y_1(p_{11} + p_{21}) + y_2(p_{12} + p_{22}). \end{aligned} \quad (*)$$

Покажем, что $p_{11} + p_{12} = p_1$ событие, состоящее в том, что X примет значение x_1 (вероятность этого события равна p_1) влечет за собой событие, которое заключается в том, что $X + Y$ примет значение $x_1 + y_1$ или $x_1 + y_2$.

$$(X = x_1) = (X + Y = x_1 + y_1) + (X + Y = x_1 + y_2).$$

На основании теоремы о вероятности суммы несовместных событий имеем

$$P(X = x_1) = P(X + Y = x_1 + y_1) + P(X + Y = x_1 + y_2), \text{ откуда } p_1 = p_{11} + p_{12}.$$

Наоборот, если $X + Y$ примет значение $x_1 + y_1$ или $x_1 + y_2$, то X примет значение x_1 , откуда следует, что $p_1 = p_{11} + p_{12}$.

Аналогично доказываются равенства $p_{21} + p_{22} = p_2, p_{11} + p_{21} = p'_1, p_{12} + p_{22} = p'_2$.

Подставляя эти результаты в вышенаписанное равенство, получаем

$$M(X + Y) = (x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2) + (y_1 \cdot p'_1 + y_2 \cdot p'_2) = M(X) + M(Y).$$

4) $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$, где X, Y – независимые случайные величины.

Доказательство. Проведем доказательство для $n = 2$. Пусть случайные величины X и Y заданы своими законами распределения

X	x_1	x_2	Y	y_1	y_2
p	p_1	p_2	p'	p'_1	p'_2

Рассмотрим случайную величину XY и ее закон распределения

$X \cdot Y$	$x_1 y_1$	$x_1 y_2$	$x_2 y_1$	$x_2 y_2$
p	$p_1 p'_1$	$p_2 p'_1$	$p_1 p'_2$	$p_2 p'_2$

Тогда по формуле (4.1) получаем

$$\begin{aligned} M(XY) &= x_1 y_1 p_1 p'_1 + x_2 y_1 p_2 p'_1 + x_1 y_2 p_1 p'_2 + x_2 y_2 p_2 p'_2 = y_1 \cdot p'_1 (x_1 p_1 + x_2 p_2) + \\ &+ y_2 \cdot p'_2 (x_1 p_1 + x_2 p_2) = (x_1 p_1 + x_2 p_2) \cdot (y_1 p'_1 + y_2 p'_2) = M(X) \cdot M(Y). \end{aligned}$$

Для $n > 2$ доказательство проводят методом математической индукции.

5) Если $a \leq X \leq b$, то $a \leq M(X) \leq b$.

4.3 Дисперсия случайной величины и ее свойства

В больших сериях экспериментов отдельные значения случайной величины X группируются вокруг ее математического ожидания. Возникает

необходимость в качественной оценке степени рассеивания случайной величины X вокруг ее среднего значения.

Определение 1. Отклонением называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием.

Определение 2. Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \quad (4.5)$$

Согласно с определением математического ожидания дисперсия случайной величины X подсчитывается по формуле

$$D(X) = \sum_i (x_i - m_x)^2 \cdot p_i. \quad (4.6)$$

для дискретной случайной величины X .

Если X – непрерывная случайная величина X , то формула для вычисления $D(X)$ имеет вид

$$(4.7)$$

Преобразуем формулу (4.5) следующим образом:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = M(X^2 - 2XM(X) + M^2(X)) = M(X^2) - M(2XM(X)) + M(M^2(X)) = M(X^2) - 2M(X) \cdot M(X) + M^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

Таким образом, получаем другую формулу для вычисления дисперсии

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2. \quad (4.8)$$

Для дискретной случайной величины X формулу (4.8) можно записать в виде

$$D(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - (m_x)^2. \quad (4.9)$$

Для непрерывной случайной величины X формула (4.8) примет вид

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (m_x)^2. \quad (4.10)$$

Приведем основные свойства дисперсии:

$$1) D(C) = 0. (C = \text{const})$$

Доказательство. На основании формулы (4.5) имеем

$$D(C) = M(C - M(C))^2 = M(C - C)^2 = M(0) = 0.$$

$$2) D(C) = C^2 D(X).$$

Доказательство. Используя формулу (4.5) имеем

$$D(CX) = M(CX - M(CX))^2 = M(CX - CM(X))^2 = M(C^2(X - M(X))^2) = C^2 M(X - M(X))^2 = C^2 D(X)$$

3) $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, если X , Y – независимые случайные величины.

Доказательство. На основании формулы (4.5) получаем

$$\begin{aligned}
D(X+Y) &= M(X+Y)^2 - (M(X+Y))^2 = M(X^2 + 2XY + Y^2) - (M(X) + M(Y))^2 = \\
&= M(X^2) + 2M(XY) + M(Y^2) - M^2(X) - 2M(X) \cdot M(Y) - M^2(Y) = \\
&= (M(X^2) - M^2(X)) + (M(Y^2) - M^2(Y)) + 2M(X) \cdot M(Y) - 2M(X) \cdot M(Y) = \\
&= D(X) + D(Y)
\end{aligned}$$

Из определения дисперсии $D(X)$ следует, что ее размерность равна квадрату размерности случайной величины X , что вызывает определенные неудобства. Поэтому, наряду с дисперсией, часто вводят иную характеристику рассеивания, которую называют средним квадратическим отклонением.

Определение. Средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$ случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

$\sigma(X)$ имеет ту же размерность, что и случайная величина X .

Пример. Найти $M(X)$ и $D(X)$ дискретной случайной величины X , заданной законом распределения

X	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Решение. Используя формулу (4.2), получаем:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i = (-2) \cdot 0,1 + (-1) \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,1 = 0,1.$$

На основании формулы (4.9) вычислим $D(X)$:

$$\begin{aligned}
D(X) &= M(X^2) - M^2(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - (m_x)^2 = (-2)^2 \cdot 0,1 + (-1)^2 \cdot 0,2 + 0^2 \cdot 0,3 + \\
&+ 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,1 - 0,1^2 = 4 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,1 - 0,01 = 1,3 - 0,01 = 1,29
\end{aligned}$$

Пример. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Решение. Используя формулы (4.4), (4.10), имеем

$$\begin{aligned}
M(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_1^2 x \left(x - \frac{1}{2} \right) dx = \int_1^2 \left(x^2 - \frac{x}{2} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4} \right) \Big|_1^2 = \\
&= \frac{8}{3} - 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{19}{12}.
\end{aligned}$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \int_1^2 x^2 \cdot f(x) dx - \left(\frac{19}{12}\right)^2 = \int_1^2 x^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx - \left(\frac{19}{12}\right)^2 =$$

$$= \int_1^2 \left(x^3 - \frac{x^2}{2}\right) dx - \frac{361}{144} = 4 - \frac{4}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{361}{144} = \frac{11}{144}.$$

5. Основные законы распределений

а) Дискретные распределения

5.1 Биномиальное распределение

Определение. Дискретная случайная величина X считается распределенной по биномиальному закону, если вероятности ее возможных значений находятся по формуле Бернулли. Говорят также, что в этом случае случайная величина X имеет биномиальное распределение.

Закон распределения случайной величины X имеет в этом случае вид

$X(\Omega)$	0	1	2	...	m	...	n
$P(X = x_i)$	q^n	npq^{n-1}	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	p^n

Здесь n – число экспериментов в схеме Бернулли, p – вероятность «успеха», а $q = 1 - p$ – вероятность «неудачи» в одном эксперименте.

Тогда по формуле Бернулли получаем

$$P(X = m) = P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} \text{ или } P(X = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot (1 - p)^{n-m}.$$

Функция распределения для данной случайной величины находится по формуле

$$F_X(x) = P(X < x) = \sum_{m < x} P_n(m) = \sum_{m < x} C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}. \quad (5.2)$$

Название биномиальное распределение случайной величины получило потому, что вероятности $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot (1 - p)^{n-m}$ в законе распределения есть коэффициенты разложения для бинома Ньютона

$$(p + q)^n = \sum_{k=0}^n P_n(k).$$

Найдем $M(X)$ и $D(X)$ для случайной величины, распределенной по биномиальному закону.

Пусть X_i – случайная величина, которая обозначает число «успехов» в i -ом эксперименте ($i = \overline{1, n}$), а X – случайная величина, которая обозначает число успехов в n экспериментах.

Тогда $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Так как все X_i независимы между собой, то

$$M(X) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n),$$

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n).$$

Закон распределения для X_i имеет следующий вид

X_i	0	1
-------	---	---

p_i	q	p
-------	-----	-----

Тогда $M(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p \quad (i = \overline{1, n})$,

$$D(X_i) = M(X_i^2) - (M(X_i))^2 = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - p^2 = p(1 - p) = p \cdot q.$$

Окончательно имеем

$$M(X) = n \cdot p, \quad D(X) = n \cdot p \cdot q. \quad (5.3)$$

Распределение Бернулли играет фундаментальную роль в теории вероятностей и математической статистике. Оно является математической моделью произвольного вероятностного эксперимента E , который описывается случайной величиной X с двумя возможными исходами $\Omega_x = (0, 1)$. Приведем несколько примеров таких экспериментов E . E_1 – стрельба по мишени: $X = 1$ («успех») – попадание в мишень; $X = 0$ («неудача» – промах). E_2 – изготовление детали на станке: $X = 1$ («успех») – изготовление стандартной детали; $X = 0$ («неудача») – изготовление бракованной детали. E_3 – покупка лотерейного билета, $X = 1$ («успех») – выигрыш; $X = 0$ («неудача») – проигрыш по этому билету и т.п.

Пример. Производится 4 независимых эксперимента, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью 0,2. Рассматривается случайная величина X – число появления события A в 4 экспериментах. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Решение. Из условия имеем $n = 4$, $p = 0,2$; $q = 0,8$. Так как X распределена по биномиальному закону, то, используя формулы (5.3), получаем

$$M(X) = n \cdot p = 4 \cdot 0,2 = 0,8, \quad D(X) = n \cdot p \cdot q = 4 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,64.$$

5.2 Распределение Пуассона (пуассоновское распределение)

Определение. Дискретная случайная величина X распределена по закону Пуассона, если вероятности ее возможных значений находятся по формуле Пуассона

$$P_n(k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}, \quad \text{где } \lambda = \text{const} \quad (\lambda = n \cdot p) \quad \lambda > 0.$$

Распределение Пуассона зависит только от одного параметра λ . Запишем пуассоновскую модель распределения в виде таблицы

$X(\Omega)$	0	1	2	...	k	...
$P(X = k)$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 \cdot e^{-\lambda}}{2!}$	...	$\frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$	...

Распределение Пуассона является удобным приближением биномиального распределения в случае малых p . Оно играет важную роль в теории надежности, так как во многих случаях оно определяет вероятность появления отказов (сбоев) в той или иной сложной системе в результате выхода со строя одной или нескольких ее частей.

Для пуассоновского распределения выполняется условие

$$\sum_i P(X=i) = \sum_i \frac{\lambda^i}{(i)!} e^{-\lambda} = 1.$$

Функция распределения для пуассоновской случайной величины

$$F_X(x) = P(X < x) = \sum_{k < x} P(X = k) = \sum_{k < x} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}. \quad (5.4)$$

Найдем $M(X)$ и $D(X)$ для пуассоновской случайной величины

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \dots \right) = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

$$M(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 \cdot \lambda^k}{k!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot \lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} ((k-1) + 1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1) \cdot \lambda^{k-1}}{(k-1)!} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda} + e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda.$$

$$\text{Тогда } D(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Таким образом, получаем

$$M(X) = \lambda, \quad D(X) = \lambda, \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}. \quad (5.5)$$

Пример. Система содержит 1000 элементов, которые работают независимо один от другого. Вероятность отказа произвольного элемента на протяжении времени T равна 0,002. Пусть случайная величина X – число элементов, которые отказали на протяжении времени T . Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Решение. Так как $\lambda = n \cdot p$, а $M(X) = \lambda$, $D(X) = \lambda$, то получаем $M(X) = 1000 \cdot 0,002 = 2$, $D(X) = 2$.

5.3 Геометрическое распределение

Пусть происходят независимые эксперименты по схеме Бернулли, это значит, в каждом эксперименте могут быть два исхода: появляется событие A с вероятностью p или оно не появляется с вероятностью $q = 1 - p$. Кроме ответа на вопрос, сколько раз наступит событие A в n независимых экспериментах Бернулли, можно поставить альтернативный вопрос: «В каком эксперименте появится первый успех?». Например, сколько деталей необходимо проконтролировать до появления первой бракованной детали, если вероятность изготовления бракованной детали равна p ? При каком выстреле наступит успех, если вероятность успеха при одном выстреле равна p ?

Пусть случайная величина X – количество проведенных экспериментов по схеме Бернулли до появления первого успеха. Первый успех в k -ом эксперименте наступит тогда и только тогда, если:

а) первые $(k-1)$ экспериментов закончились неудачей, что происходит с вероятностью $(1-p)^{k-1}$.

б) k -ый эксперимент закончился успехом, что происходит с вероятностью p , т.е.

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p = p \cdot q^{k-1}. \quad (5.6)$$

Покажем, что $\sum_k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} p \cdot q^{k-1} = 1$, это значит, что формула (5.6) задает распределение вероятностей случайной величины X .

Действительно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p \cdot q^{k-1}$ представляет собой бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем q : он сходится и его сумма равна 1:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p \cdot q^{k-1} = p + pq + pq^2 + \dots + pq^{k-1} + \dots = p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

Таким образом, формула (5.6) дает распределение, которое называется геометрическим. Приведем геометрическое распределение в виде таблицы.

$X(\Omega)$	1	2	3	...	k	...
$P(X=x_i)$	p	qp	$q^2 \cdot p$	...	$q^{k-1} \cdot p$	...

Найдем числовые характеристики геометрического распределения.

$$\begin{aligned} M(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X=k) = 1 \cdot p + 2q \cdot p + 3q^2 \cdot p + \dots + kq^{k-1} p + \dots = \\ &= 1 - q + 2q - 2q^2 + 3q^2 - 3q^3 + \dots + kq^{k-1} - kq^k + \dots = 1 + q + q^2 + \dots + q^k + \dots = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + q + q^2 + \dots + q^k + \dots) = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$M(X) = \frac{1}{p}. \quad (5.7)$$

Следовательно, математическое ожидание количества экспериментов Бернулли до появления первого «успеха» есть число, обратное вероятности наступления события A . Например, если вероятность наступления события A в одном эксперименте равна 0,1, то для того, чтобы произошло событие A , необходимо продублировать эксперимент в среднем 10 раз. Аналогично можно показать, что

$$D(X) = \frac{1-p}{p^2}. \quad (5.8)$$

б) Непрерывные распределения

5.4 Равномерное распределение

Определение. Непрерывная случайная величина X называется равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$, если на этом отрезке плотность распределения сохраняет неизменное значение, т.е.

$$f(x) = \begin{cases} c, & \forall x \in [a, b] \\ 0, & \forall x \notin [a, b] \end{cases}.$$

Найдем константу c из условия $\int_a^b f(x)dx = 1$, $\int_a^b cdx = 1$, $cx \Big|_a^b = 1$, $c(b-a) = 1$, $c = \frac{1}{b-a}$.

Тогда для равномерного распределения имеем

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x > b \end{cases} \quad (5.9)$$

Найдем функцию распределения $F(x)$.

Для $x \leq a$ $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 \cdot dx = 0$.

Для $a < x \leq b$ $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^a 0 \cdot dx + \int_a^x \frac{1}{b-a} \cdot dx = \frac{x}{b-a} \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$.

Для $x > b$ $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^a 0 \cdot dx + \int_a^b \frac{1}{b-a} dx + \int_b^x 0 \cdot dx = \frac{1}{b-a} x \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a} = 1$.

Таким образом, для $F(x)$ получаем формулу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases} \quad (5.10)$$

Графики плотности распределения и функции распределения имеют вид

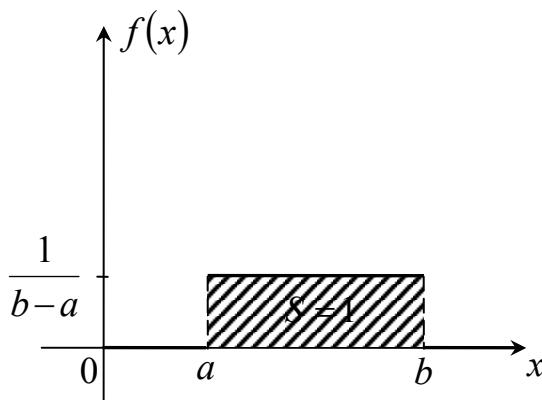


Рис. 5.1

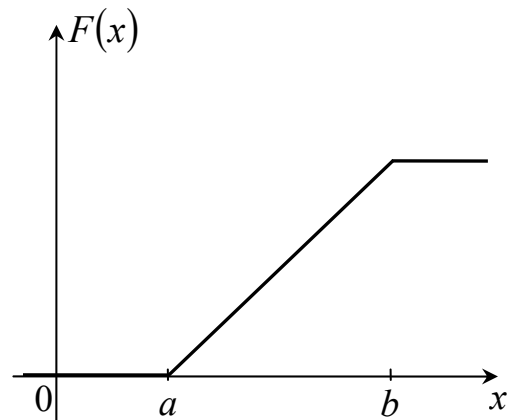


Рис. 5.2

Найдем $M(X)$ и $D(X)$ для равномерного распределения

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_a^b \frac{x dx}{b-a} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2};$$

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_a^b \frac{x^2 dx}{b-a} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3};$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{b^2 - ab + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Таким образом, для равномерного распределения

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (5.11)$$

Равномерное распределение используется как математическая модель ошибок показаний стрелочных приборов.

Пример. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка: а) меньше, чем 0,04; б) больше, чем 0,05.

Решение. Введем обозначения:

A – сделана ошибка, меньшая, чем 0,04.

X – ошибка округления отсчета.

Случайная величина X распределена равномерно в интервале между двумя соседними целыми делениями.

$$b-a = 0,2; f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ для интервала, в котором заключены}$$

возможные значения X , вне этого интервала $f(x) = 0$.

а) Легко догадаться, что ошибка отсчета будет меньше, чем 0,04, если она будет заключена в интервале (0;0,04) или в интервале (0,16;0,20).

Тогда $A = (0 < X < 0,04) + (0,16 < X < 0,20)$ и по формуле суммы вероятностей несовместных событий имеем

$$P(A) = P(0 < X < 0,04) + P(0,16 < X < 0,20) = \int_0^{0,04} 5 dx + \int_{0,16}^{0,2} 5 dx = 5x \Big|_0^{0,04} + 5x \Big|_{0,16}^{0,2} =$$

$$= 5 \cdot 0,04 + 5 \cdot 0,2 - 5 \cdot 0,16 = 0,2 + 1 - 0,8 = 0,4.$$

б) ошибка отсчета будет больше, чем 0,05, если она будет заключена в интервале (0,05;0,15).

Пусть $B = (0,05 < X < 0,15)$.

$$P(B) = P(0,05 < X < 0,15) = \int_{0,05}^{0,15} 5 \cdot dx = 5x \Big|_{0,05}^{0,15} = 5 \cdot (0,15 - 0,05) = 0,5.$$

Пример. Поезда в метро идут точно по расписанию с интервалом 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, появившийся на остановке, будет ожидать очередной поезд меньше 3 минут.

Решение. Время прихода пассажира можно рассматривать как случайную величину X , которая распределена на отрезке $[0,5]$. Плотность

распределения $f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{5}$ на отрезке $[0,5]$, Пассажир будет ожидать поезд меньше 3 минут, если $2 < X < 5$.

$$\text{Тогда } P(2 < X < 5) = \int_2^5 f(x) dx = \int_2^5 \frac{1}{5} dx = \frac{x}{5} \Big|_2^5 = \frac{3}{5} = 0,6.$$

5.5 Экспоненциальное (показательное) распределение

Определение. Непрерывная случайная величина X имеет показательное (экспоненциальное) распределение, если ее плотность $f(x)$ задана формулой

(5.12)

Это распределение зависит от одного параметра λ . Найдем функцию распределения $F(x)$.

$$\text{Для } x < 0 \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x 0 \cdot dx = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Для } x \geq 0 \quad F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda e^{-\lambda x} \left(-\frac{1}{\lambda} \right) \Big|_0^x = \\ &= -e^{-\lambda x} + 1 = 1 - e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Тогда

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

Графики плотности распределения и функции распределения показаны на рисунках 5.3 и 5.4.

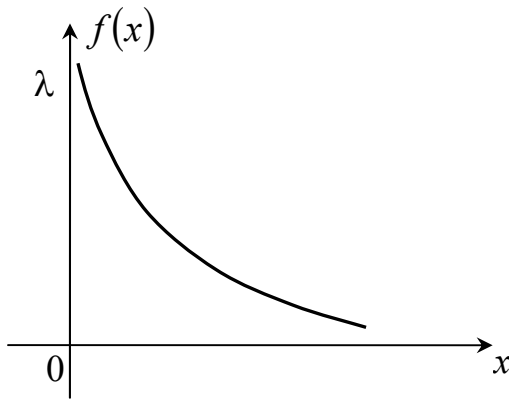


Рис. 5.3

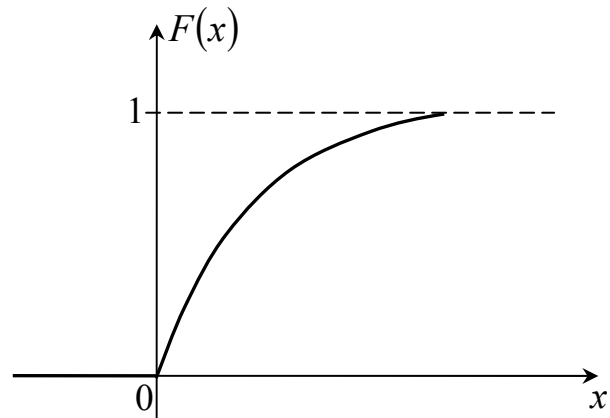


Рис. 5.4

Найдем $M(X)$ и $D(X)$ для показательного распределения

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \lambda \int_0^{\infty} x \cdot e^{-\lambda x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \lambda \int_0^a x \cdot e^{-\lambda x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = e^{-\lambda x} dx \\ du = dx, \quad v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\lambda \frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x} \Big|_0^a + \int_0^a e^{-\lambda x} dx \right) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{a}{e^{\lambda a}} + \frac{1}{\lambda} \right) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-(a)'}{(e^{\lambda a})'} + \frac{1}{\lambda} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-1}{\lambda e^{\lambda a}} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda};$$

$$M(X^2) = \int_0^\infty \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx.$$

Используя двухразовое интегрирование по частям, получаем $M(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$.

$$\text{Тогда } D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Таким образом, получили формулы

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}. \quad (5.14)$$

Показательное (экспоненциальное) распределение используется в качестве одной из возможных математических моделей в теории надежности, массового обслуживания и т.п.

Рассмотрим некоторую систему, элементы которой начинают работать в момент времени $t_0 = 0$, а в момент t происходит отказ.

Обозначим через T непрерывную случайную величину – продолжительность времени безотказной работы элемента, а через λ – интенсивность отказов, это значит среднее количество отказов за единицу времени.

Часто продолжительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение, функция распределения которого задается формулой

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (\lambda > 0, t > 0). \quad (5.15)$$

Функция $F(t)$ определяет вероятность отказа элемента за время продолжительностью t .

Функцией надежности $R(t)$ называют функцию, которая определяет вероятность безотказной работы элемента за время продолжительностью t .

$$R(t) = e^{-\lambda t} \quad (\lambda > 0, t \geq 0). \quad (5.16)$$

Пример. Продолжительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение с функцией распределения $F(t) = 1 - e^{-0,03t}$. Найти вероятность того, что за время продолжительностью $t = 100$ часов а) элемент откажет; б) элемент не откажет.

Решение. а) Так как функция $F(t) = 1 - e^{-0,03t}$ определяет вероятность отказа элемента за время продолжительностью t , то подставляя $t = 100$ в $F(t)$, получим вероятность отказа

$$F(100) = 1 - e^{-0,03 \cdot 100} = 1 - e^{-3} \approx 0,95.$$

б) События «элемент откажет» и «элемент не откажет» – противоположные, поэтому вероятность того, что элемент не откажет

$$P = 1 - 0,95 = 0,05.$$

Пример. Проверяют три элемента, которые работают независимо один от другого. Продолжительность времени безотказной работы элемента распределена по показательному закону: для первого элемента $f_1(t) = 0,1 \cdot e^{-0,1t}$, для второго $f_2(t) = 0,2 \cdot e^{-0,2t}$, для третьего $f_3(t) = 0,3 \cdot e^{-0,3t}$. Найти вероятности того, что в интервале времени (0,5) часов откажут: а) хотя бы один элемент; б) не менее двух элементов.

Решение. Введем обозначения событий: A – все 3 элемента работают; A_i – работает i -ый элемент ($i = 1, 2, 3$); $\bar{A}_i$ – i -ый элемент отказал ($i = 1, 2, 3$); B – отказали не менее двух элементов.

Тогда $\bar{A}$ – хотя бы один элемент отказал.

а) Имеем $A = A_1 A_2 A_3$.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 1 - e^{-0,1 \cdot 0,5} \cdot e^{-0,2 \cdot 0,5} \cdot e^{-0,3 \cdot 0,5} = 1 - e^{-0,5} \cdot e^{-1} \cdot e^{-1,5} =$$

$$= 1 - e^{-3} \approx 1 - 0,05 = 0,95.$$

б) $B = \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$.

Тогда

$$P(B) = (1 - e^{-0,5})(1 - e^{-1})e^{-0,3 \cdot 0,5} + (1 - e^{-0,5})e^{-1}(1 - e^{-0,3 \cdot 0,5}) + e^{-0,5}(1 - e^{-1})(1 - e^{-0,3 \cdot 0,5}) + (1 - e^{-1}) \cdot (1 - e^{-0,3 \cdot 0,5}) = (1 - e^{-0,5})(1 - e^{-1}) + (1 - e^{-1,5})(e^{-1} - e^{-1,5} + e^{-0,5} - e^{-1,5}) \approx 0,35.$$

5.6 Нормальное распределение (распределение Гауса). Кривая Гауса

Определение. Непрерывная случайная величина X имеет нормальное распределение (распределение Гаусса), если плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \quad (5.17)$$

Из формулы (5.17) очевидно, что нормальное распределение зависит от двух параметров a и σ .

Функция нормального распределения имеет следующий вид

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (5.18)$$

Исследуем функцию $f(x)$, график которой называется кривой Гауса. Рассмотрим ее свойства.

- 1) $D(f): (-\infty, \infty)$;
- 2) $f(x) > 0$, это значит, кривая Гауса размещена выше оси Ox ;
- 3) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, это значит, прямая $y = 0$ (ось Ox) – горизонтальная асимптота кривой Гауса;

- 4) кривая Гауса имеет максимум в точке $x = a$, причем $f(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Доказательство.

$$y' = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right) \cdot 2 \cdot (x-a),$$

откуда очевидно, что $y' = 0$ при $x = a$, $y' > 0$ при $x < a$, $y' < 0$ при $x > a$. Следовательно, при $x = a$ функция $y = f(x)$ имеет максимум

$$f_{\max}(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

При увеличении (уменьшении) параметра σ максимальная ордината уменьшается (увеличивается).

5) График функции $y = f(x)$ симметричен относительно прямой $x = a$, так как в аналитическом выражении функции разность $(x-a)$ содержится во второй степени.

6) Точки $\left(a - \sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$, $\left(a + \sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ – точки перегиба графика функции $y = f(x)$.

Доказательство.

$$y'' = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(1 - \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right).$$

Очевидно, что $y'' = 0$ при $x = a \pm \sigma$ и при переходе через эти точки y'' меняет знак. Следовательно, $x = a \pm \sigma$ – абсциссы точек перегиба

$$f(a \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}.$$

Таким образом, $\left(a - \sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$, $\left(a + \sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ – точки перегиба графика.

7) Площадь фигуры, которая находится между кривой Гауса и осью абсцисс равна 1, т.е.

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot dx = 1.$$

8) С возрастанием σ кривая Гауса становится более пологой, с убыванием более остро-вершинной (рис. 5.5)

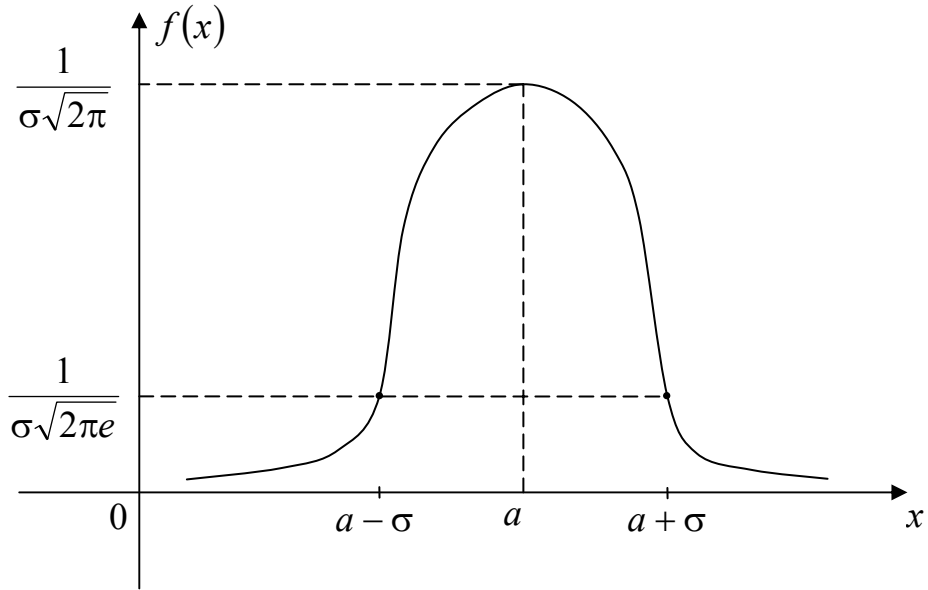


Рис. 5.5

5.7 Математическое ожидание и дисперсия нормального распределения

Докажем, что в формуле (5.17) параметр a является математическим ожиданием, а параметр σ – средним квадратическим отклонением

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \frac{x-a}{\sigma} = z, x = a + \sigma z \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (a + \sigma z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

$\int_{-\infty}^{\infty} z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0$, как интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi} \text{ (интеграл Пуассона).}$$

Таким образом, получаем

$$M(X) = 0 + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = a, M(X) = a$$

Найдем $D(X)$:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx - a^2 =$$

$$= \left| \frac{x-a}{\sigma} = z, x = a + \sigma z, dx = \sigma dz \right| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (a + \sigma z)^2 \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot \sigma dz - a^2 =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{2a\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - a^2.$$

Так как $\int_{-\infty}^{\infty} z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0$, как интеграл по симметричному промежутку, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$, как интеграл Пуассона, то получаем

$$D(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \left| \begin{array}{l} u = z, \quad dv = z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ du = dz, \quad v = -2ze^{-\frac{z^2}{2}} \end{array} \right| = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(-2ze^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) =$$

$$= \left| \lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{e^{\frac{z^2}{2}}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(z)'}{\left(e^{\frac{z^2}{2}}\right)'} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{ze^{\frac{z^2}{2}}} = 0 \right| = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = \sigma^2;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sigma.$$

Окончательно получаем

$$M(X) = a, \quad D(X) = \sigma^2, \quad \sigma(X) = \sigma. \quad (5.19)$$

Нормальное распределение играет исключительно важную роль в теории вероятностей и статистике. Главная особенность нормального распределения в том, что оно является предельным распределением, к которому приближаются другие распределения при выполнении некоторых условий. При определенных условиях (об этом будет сказано в следующем параграфе) суммы случайных величин $\sum_{i=1}^n X_i$ асимптотически нормальные, это значит, имеют распределение, близкое к нормальному.

Если случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(X) = a$ и $\sqrt{D(X)} = \sigma$, то этот факт записывается коротко с помощью символической записи: $X \in N(a, \sigma)$.

5.8 Вероятность попадания на заданный интервал нормально распределенной случайной величины

Пусть случайная величина X распределена нормально, это значит

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Так как вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал (α, β) , находится по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx,$$

то подставляя вместо $f(x)$ ее выражение, получаем

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x-a}{\sigma} = t, \quad x = a + t\sigma \\ dx = \sigma dt \end{array} \right| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} \sigma \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Окончательно имеем

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \quad (5.20)$$

Пример. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала $(0,5; 3,5)$, если она распределена нормально с параметрами $a = 3$ и $\sigma = 1$.

Решение. По условию $X \in N(3, 1)$; $\alpha = 0,5$; $\beta = 3,5$. На основании формулы (5.20) получаем

$$P(0,5 < X < 3,5) = \Phi\left(\frac{3,5-3}{1}\right) - \Phi\left(\frac{0,5-3}{1}\right) = \Phi(0,5) - \Phi(-2,5) = \Phi(0,5) + \Phi(2,5) = \\ = 0,1915 + 0,4938 \approx 0,6853$$

5.9 Вычисление вероятности заданного отклонения нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания

Теорема. Пусть a и σ – математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение нормально распределенной случайной величины. Тогда имеет место формула

$$P(|X - a| < \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \quad (5.21)$$

Доказательство. Имеем $P(|X - a| < \varepsilon) = P(a - \varepsilon < X < a + \varepsilon)$. Используя формулу (5.20), получаем

$$P(a - \varepsilon < X < a + \varepsilon) = \Phi\left(\frac{a + \varepsilon - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \varepsilon - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = \\ = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Пример. Деталь, которую производит автомат, считается стандартной, если отклонение ее контролируемого размера от проектного не превышает 10 мм. Случайные отклонения контролируемого размера от проектного подчинены нормальному закону с параметрами $a = 0$, $\sigma = 5$ мм. Сколько процентов стандартных деталей выпускает автомат?

Решение. Из условия имеем $a = 0$, $\sigma = 5$, $\varepsilon = 10$. Используя формулу (5.21), получаем

$$P(|X - 0| < 10) \approx 2\Phi\left(\frac{10}{5}\right) \approx 2\Phi(2) \approx 0,95.$$

Отсюда следует, что из каждых 100 деталей примерно 95 будут стандартными.

Пример. Случайные величины измерения подчинены нормальному закону с математическим ожиданием $a=0$ и средним квадратическим отклонением $\sigma=20$ мм. Найти вероятность того, что из трех независимых измерений ошибка хотя бы одного не превышает по абсолютной величине 4 мм.

Решение. Из условия имеем $a=0$, $\sigma=20$, $\varepsilon=4$. Пусть X – ошибка измерения. На основании формулы (5.21) имеем

$$P(|X| < 4) \approx 2\Phi\left(\frac{4}{20}\right) \approx 2\Phi(0,2) \approx 0,1586.$$

Мы нашли вероятность того, что ошибка одного измерения не превышает по абсолютной величине 4 мм. Найдем вероятность противоположного события:

$$P(|X| \geq 4) = 1 - P(|X| < 4) = 1 - 0,1586 = 0,8414.$$

Введем обозначения событий:

A – ошибка хотя бы одного из трех независимых измерений не превышает 4 мм;

$\bar{A}$ – ошибка всех трех измерений превышает 4 мм;

A_i – ошибка i -ого измерения превышает 4 мм, где $i=1,2,3$.

Тогда

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 1 - 0,8414^3 \approx 1 - 0,59 = 0,41.$$

Пример. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a=25$. Вероятность попадания в интервал (10,15) равна 0,2. Чему равна вероятность попадания X в интервал (35,40)?

Решение. Так как кривая Гауса расположена симметрично относительно прямой $x=a=25$, то площади, ограниченные сверху нормальной кривой, снизу – интервалами (10,15) и (35,40) равны между собой. Так как эти площади равны вероятностям попадания X в соответствующий интервал, то

$$P(35 < X < 40) = P(10 < X < 15) = 0,2.$$

5.10 Правило трех сигм

Преобразуем формулу (5.21) следующим образом. Положим $\varepsilon=5t$. В результате получаем

$$P(|X - a| < \sigma t) = 2\Phi(t).$$

При $t=1$ получаем

$$P(|X - a| < \sigma) = 2\Phi(1) = 0,6827,$$

при $t=2$ имеем

$$P(|X - a| < 2\sigma) = 2\Phi(2) = 0,9545,$$

при $t=3$ получаем

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0,9973.$$

Из формулы (5.22) имеем результат: вероятность того, что отклонение по абсолютной величине нормально распределенной случайной величины от

ее математического ожидания будет меньше утроенного среднего квадратического отклонения, равная 0,9973.

Из формулы (5.22) следует, что практически рассеивание нормально распределенной случайной величины X укладывается на участок $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$.

Очевидно, что вероятность того, что нормально распределенная случайная величина X попадет не на этот участок, очень мала, а именно равна 0,0027.

$$P(|X - a| > 3\sigma) = 0,0027,$$

это значит, что только в 0,27% случаев может произойти, что X не попадет на интервал $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$. Такие события можно считать практически невозможными. В этом и состоит правило трех сигм: если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превышает утроенного среднего квадратического отклонения.

На практике правило трех сигм используют так: когда распределение случайной величины, которая изучается, неизвестно, но выполняется правило трех сигм, то есть основания считать, что данная случайная величина распределена нормально: в противном случае она не распределена нормально.

Пример. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a = 10$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$. Найти интервал, в который с вероятностью 0,9973 попадает X в результате испытания.

Решение. Используем правило трех сигм:

$$P(|X - a| < 3\sigma) \approx 2\Phi(3) = 0,9973,$$

откуда получаем $a - 3\sigma < X < a + 3\sigma$, это значит, $10 - 3 \cdot 5 < X < 10 + 3 \cdot 5$, $X \in (-5, 25)$.

6. Предельные теоремы теории вероятностей

6.1 Сходимость случайных величин

Теория вероятностей изучает закономерности, которые выявляются при многократном повторении вероятностных экспериментов, которые проводятся в одинаковых условиях. Изучение таких закономерностей позволяет прогнозировать результаты таких экспериментов. При достаточно большом количестве испытаний некоторые характеристики случайных величин становятся почти неслучайными. В этом случае принято говорить, что характеристики имеют свойство устойчивости. Это свойство имеют относительные частоты. Это значит, если условия эксперимента достаточно стабильные, то относительная частота колеблется около некоторой постоянной величины. Другими словами, при $n \rightarrow \infty$ относительная частота практически теряет характер случайной величины. При большом количестве

экспериментов среднее арифметическое их результатов $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ также имеет свойство устойчивости: при $n \rightarrow \infty$ $\bar{X} \rightarrow M(X)$.

Группа теорем, которые устанавливают соответствие между теоретическими и эмпирическими характеристиками случайных величин и случайных событий при большом количестве дублей эксперимента в одинаковых условиях, и тех, которые касаются предельных законов распределения, объединяются под общим названием предельных теорем теории вероятностей.

Мы познакомились с двумя типами предельных теорем:

1) законом больших чисел; 2) центральной предельной теоремой и предельными теоремами Муавра-Лапласа.

Закон больших чисел устанавливает связь между математическими моделями эксперимента и практикой. Этот закон имеет множество формулировок и выражается рядом теорем (Чебышева, Бернулли и других). В этих теоремах даются условия, при выполнении которых совокупное действие многочисленных случайных неконтролируемых изменений, условий эксперимента (случайных причин) приводит к устойчивым результатам, почти независимых от случая.

С некоторыми предельными теоремами мы уже познакомились. Например, биномиальное распределение случайной величины X $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ при $n \rightarrow \infty$ и при одновременном выполнении условия $n \cdot p = \lambda$ «сходится» к распределению Пуассона

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}.$$

Практическое значение предельных теорем состоит в аппроксимации допредельного распределения суммы случайных величин $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k$ (в этом

случае принято говорить, что распределение случайной величины $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k$

сходится к распределению $Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n X_k$.

Укажем сначала, в каком смысле будем понимать сходимость случайных величин, которые используются при изучении предельных теорем теории вероятностей.

Пусть дана последовательность случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, определенных на одном и том же вероятностном пространстве (Ω, F, P) . Так как случайные величины, которые образуют эту последовательность, являются функциями элементарных исходов $\omega \in \Omega$, то, выбирая $\omega_0 \in \Omega$, получаем числовую последовательность $X_1(\omega_0), X_2(\omega_0), \dots, X_n(\omega_0), \dots$, которая может сходиться или расходиться.

Рассмотрим некоторое множество элементарных событий $A \subset \Omega$, которому соответствуют сходящиеся числовые последовательности. Пусть $X(\omega_0)$ – предель этой числовой последовательности: $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ для $\forall \omega \in A$. В этом случае говорят, что последовательность случайных величин X_n , $n = \overline{1, \infty}$, сходится к X с вероятностью 1.

Определение 1. Последовательность случайных величин X_n , $n = \overline{1, \infty}$, сходится к X с вероятностью 1, если

$$P\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1.$$

Наряду со сходимостью случайных величин с вероятностью 1 наиболее часто употребляется сходимость по вероятности и сходимость в среднем квадратичном.

Определение 2. Последовательность случайных величин X_n , $n = \overline{1, \infty}$, сходится к случайной (или не случайной) величине X по вероятности, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1$ (используется запись $X_n^p \rightarrow X$).

Сходимость по вероятности отличается от сходимости в смысле обыкновенного анализа. Отличие в следующем: если X_n стремится при $n \rightarrow \infty$ к X в смысле обыкновенного анализа, то для $\forall \varepsilon > 0$ существует $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что для $\forall n > n_0(\varepsilon)$ всегда выполняется неравенство $|X_n - X| < \varepsilon$. Если же X_n стремится при $n \rightarrow \infty$ к X по вероятности, то при отдельных, даже произвольно больших значениях n неравенство $|X_n - X| < \varepsilon$ может не выполняться.

Определение 3. Последовательность случайных величин X_n , $n \rightarrow \infty$ сходится к случайной величине X в среднем квадратичном, если $\lim_{n \rightarrow \infty} M(X_n - X)^2 = 0$.

Этот вид сходимости изучается в анализе, например, при рассмотрении сходимости рядов Фурье и является основой метода наименьших квадратов.

Рассмотрим теперь последовательности функций распределения $F_n(x)$, $n \rightarrow \overline{1, \infty}$, которые раньше упоминались.

Определение 4. Последовательность функций распределения $F_n(x) = P(X_n < X)$ сходится по распределению (говорят также: слабо сходится) к функции $F(x)$, если для произвольной точки x , где $F(x)$ непрерывная, выполняется равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$.

Примером сходимости по распределению является сходимость биномиального распределения к распределению Пуассона.

Рассмотренные выше понятия сходимости позволяют выяснить содержание закона больших чисел.

Под законом больших чисел понимают ряд теорем, которые утверждают, что разность

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M(X_k) \quad (6.1)$$

сходится к нулю по вероятности.

Теоремы, которые утверждают, что величина (6.1) сходится с вероятностью 1 к нулю, носят название усиленного закона больших чисел.

В данном параграфе мы будем рассматривать только теоремы, которые утверждают, что разность (6.1) сходится к нулю по вероятности. При доказательстве теорем, которые составляют суть закона больших чисел, используют неравенство Чебышева.

6.2 Неравенство Чебышева

Теорема. Пусть имеем случайную величину X , которая имеет конечное математическое ожидание $M(X)$ и конечную дисперсию σ^2 . Тогда вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания будет по абсолютной величине не меньше произвольного положительного числа ε , ограничена сверху величиной $\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$, это значит имеет место неравенство

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \quad (6.2)$$

или

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}. \quad (6.3)$$

Неравенство (6.2) и называется неравенством Чебышева.

Доказательство. Покажем сначала, что если случайная величина X принимает только положительные значения, то

$$P(X \geq 1) \leq M(X).$$

Для непрерывной случайной величины имеем

$$P(X \geq 1) = \int_1^{\infty} f(x) dx \leq \int_1^{\infty} x \cdot f(x) dx \leq \int_0^{\infty} x \cdot f(x) dx = M(X),$$

это значит

$$P(X \geq 1) \leq M(X). \quad (6.4)$$

Аналогично можно доказать это для дискретной случайной величины.

Неравенства $(|X - M(X)| \geq \varepsilon)$ и $\left(\frac{|X - M(X)|^2}{\varepsilon^2} \geq 1\right)$ эквивалентны, это

значит, что

$$(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \Leftrightarrow \left(\frac{|X - M(X)|^2}{\varepsilon^2} \geq 1\right).$$

Так как случайная величина $\frac{(X - M(X))^2}{\varepsilon^2}$ принимает только неотрицательные значения, то на основании неравенства (6.4) имеем

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) = P\left(\frac{(X - M(X))^2}{\varepsilon^2} \geq 1\right) \leq \frac{M(X - M(X))^2}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Окончательно получаем

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2},$$

что и требовалось доказать.

Так как $(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \cup (|X - M(X)| < \varepsilon) = \Omega$, то неравенство Чебышева можно записать в виде

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Замечание. В случае произвольной случайной величины, если положить $\varepsilon = 3\sigma$, из неравенства Чебышева (6.2) следует

$$P(|X - M(X)| \geq 3\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \frac{1}{9}, \quad P(|X - M(X)| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{9}.$$

Неравенство Чебышева имеет ограниченное значение на практике (оно полезно только при сравнительно больших ε).

Неравенство Чебышева имеет главным образом теоретическое значение, так как является основой доказательства ряда теорем, которые входят в закон больших чисел.

Пример 1. Электростанция обслуживает сеть с 18000 ламп, вероятность включения каждой из которых зимним вечером равна 0,9. Какова вероятность того, что количество ламп (включенных в сеть зимним вечером) отличается от своего математического ожидания по абсолютной величине не более, чем на 200? (Пользуясь неравенством Чебышева, оценить эту вероятность).

Решение. Пусть X – количество включенных ламп. Данная случайная величина распределена по биномиальному закону, поэтому

$$M(X) = n \cdot p = 18000 \cdot 0,9 = 16200, \quad D(X) = n \cdot p \cdot q = 16200 \cdot 0,1 = 1620.$$

Подставляя в неравенство Чебышева в форме

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$M(X) = 16200$, $\sigma^2 = 1620$, $\varepsilon = 200$, получаем

$$P(|X - 16200| < 200) \geq 1 - \frac{1620}{200^2} = 1 - 0,0405 = 0,9595.$$

Подсчитать вероятность можно с помощью интегральной теоремы Муавра-Лапласа

$$\begin{aligned} P(|X - 16200| < 200) &= P(16000 < X < 16400) = \Phi\left(\frac{16400 - 16200}{\sqrt{1620}}\right) - \\ &- \Phi\left(\frac{16000 - 16200}{\sqrt{1620}}\right) = \Phi\left(\frac{200}{40,25}\right) - \Phi\left(\frac{-200}{40,25}\right) = \Phi(4,97) + \Phi(4,97) = 2\Phi(4,97) = \\ &= 2 \cdot 0,49997 = 0,99994 \end{aligned}$$

Пример 2. Распределение случайной величины X задано таблицей

X	-1	0	2	4	6
$P(X)$	0,2	0,4	0,3	0,05	0,05

Чему равна вероятность того, что $|X - M(X)| < 5$? Оценить эту вероятность с помощью неравенства Чебышева.

Решение. Используя соответствующие формулы, находим $M(X)$ и $D(X)$:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i = (-1) \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,05 + 6 \cdot 0,05 = 0,9.$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - M^2(X) = 1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 + 16 \cdot 0,05 + 36 \cdot 0,05 - 0,9^2 = 3,19.$$

Чтобы найти $P(|X - M(X)| < 5)$, нужно знать те значения x , которые удовлетворяют неравенству $|X - M(X)| < 5$.

$$|X - 0,9| < 5, \quad -5 < X - 0,9 < 5, \quad -4,1 < X < 5,9.$$

Этому неравенству удовлетворяют только такие значения X : -1; 0; 2; 4.

Отсюда получаем

$$P(|X - 0,9| < 5) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 4) = 0,2 + 0,4 + 0,3 + 0,05 = 0,95.$$

Пользуясь неравенством Чебышева, получаем оценку данной вероятности снизу

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

$$P(|X - 0,9| < 5) \geq 1 - \frac{3,19}{5^2} \cong 1 - 0,1276 \cong 0,8724,$$

$$P(|X - 0,9| < 5) \geq 0,8724.$$

6.3 Теорема Чебышева

Теорема Чебышева является одной из важнейших форм закона больших чисел. Она устанавливает связь между средним арифметическим случайных величин и средним арифметическим их математических ожиданий.

Теорема Чебышева. Пусть X_k , $k = \overline{1, \infty}$ – последовательность независимых случайных величин, в которых $D(X_k) \leq C$ для $\forall k = \overline{1, \infty}$ и все математические ожидания конечны. Тогда среднее арифметическое этих случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M(X_k) \right| \geq \varepsilon \right) = 0. \quad (6.5)$$

Доказательство. Рассмотрим случайную величину $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$. Найдем ее числовые характеристики

$$M(Y_n) = M\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M(X_k).$$

По условию, $D(X_k) \leq C$, следовательно

$$D(Y_n) = D\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n D(X_k) \leq \frac{Cn}{n^2} = \frac{C}{n}, \quad D(Y_n) \leq \frac{C}{n}.$$

Для случайной величины Y_n приложим неравенство Чебышева

$$P(|Y_n - M(Y_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(Y_n)}{\varepsilon^2}.$$

Учитывая, что $D(Y_n) \leq \frac{C}{n}$, имеем

$$P(|Y_n - M(Y_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{C}{n \cdot \varepsilon^2}.$$

Отсюда при $n \rightarrow \infty$ получаем (так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C}{n \varepsilon^2} = 0$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M(X_k)\right| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, мы показали, что $Y_n \rightarrow M(Y_n)$ по вероятности к нулю. Переходя в полученном неравенстве к противоположному событию, можно получить иную формулировку закона больших чисел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M(X_k)\right| < \varepsilon\right) = 1. \quad (6.6)$$

Замечание. На практике часто используются неравенства

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M(X_k)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{C}{n \cdot \varepsilon^2}. \quad (6.7)$$

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M(X_k)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{C}{n \cdot \varepsilon^2}, \quad (6.8)$$

которые имели место при доказательстве теоремы Чебышева.

В формуле (6.6) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ – среднее арифметическое случайных величин также является случайной величиной, но среднее арифметическое их математических ожиданий $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M(X_k)$ – некоторая постоянная величина.

Таким образом, теорема Чебышева утверждает, что среднее арифметическое большого количества независимых случайных величин утрачивает характер случайной величины, т.е. сходится по вероятности к некоторому постоянному числу.

Следствие. Пусть независимые случайные величины $X_k, k = \overline{1, \infty}$ имеют одинаковые математические ожидания $M(X_k) = m$ для $\forall k = \overline{1, n}$, а их дисперсии удовлетворяют условию $D(X_k) \leq C$ для $\forall k = \overline{1, n}$, тогда среднее арифметическое случайных величин сходится по вероятности к числу m при $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - m\right| \leq \varepsilon\right) = 1.$$

Пример 1. Для определения средней урожайности поля в 5000 га предлагается взять на выборку по 1 м² с каждого гектара площади и точно подсчитать урожайность с этих квадратных метров. Оценить вероятность того, что средняя выборочная урожайность будет отличаться от действительной средней урожайности на всем массиве не более чем на 0,2 ц, если допустить, что среднее квадратическое отклонение урожайности на каждом гектаре не превысит 5 ц.

Решение. Пусть X_i – урожайность с 1 м² i -ого гектара, где $i = \overline{1, 5000}$; $M(X_i)$ – средняя урожайность с i -ого гектара, где $i = \overline{1, 5000}$. Тогда $\frac{\sum_{i=1}^{5000} X_i}{5000}$ – средняя выборочная урожайность, $\frac{\sum_{i=1}^{5000} M(X_i)}{5000}$ – действительная средняя урожайность.

Из условия $\varepsilon = 0,2$, $D(X_i) < 5^2$, $\sigma(X_i) < 5$. Используем теорему Чебышева в форме:

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n M(X_i)}{n}\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{C}{n \cdot \varepsilon^2},$$

где $X_i, i = \overline{1, 5000}$ – независимые случайные величины.

Подставляя $n = 5000$, $c = 25$, $\varepsilon = 0,2$ в предыдущее неравенство, получаем

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{5000} X_i}{5000} - \frac{\sum_{i=1}^{5000} M(X_i)}{5000}\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{25}{5000 \cdot 0,04} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Таким образом, $p \geq \frac{7}{8}$.

Пример 2. Сколько нужно произвести независимых измерений некоторой величины, чтобы с вероятностью не меньшей, чем 0,98 можно было утверждать, что среднее арифметическое результатов измерений будет отличаться от действительного значения по абсолютной величине меньше,

чем на 0,08, если дисперсия каждого отдельного результат измерения не превышает 1.

Решение. Пусть X_i – результат i -ого измерения, $D(X_i) \leq 1$, $\varepsilon = 0,01$.

Необходимо найти n , при котором

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n M(X_i)}{n}\right| < \varepsilon\right) \geq 0,98.$$

Так как

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n M(X_i)}{n}\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{C}{n \cdot \varepsilon^2},$$

где $C = 1$, $\varepsilon = 0,01$, то предыдущее неравенство будет выполняться, если

$$1 - \frac{C}{n \varepsilon^2} \geq 0,98,$$

$$\text{откуда } 1 - \frac{C}{n \cdot 0,01^2} \geq 0,98; \quad 0,02 \geq \frac{10000}{n}, \quad n \geq 500000.$$

6.4 Теорема Бернулли. Теорема Пуассона

Теорема Бернулли является важной и исторически первой формой закона больших чисел (опубликована в 1713 г.). Она устанавливает связь между относительной частотой события и ее вероятностью. Теорема Пуассона – второй важный результат из теоремы Чебышева. Доказательство Бернулли было сложное. Более простое доказательство дал П.Л. Чебышев.

Теорема Бернулли. Если в каждом из n независимых испытаний вероятность появления события A неизменная и равна p , то относительная частота события сходится по вероятности p при $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1. \quad (6.9)$$

Доказательство. Пусть случайная величина X_k – число наступления события A в k -ом испытании, тогда $m = \sum_{k=1}^n X_k$ – число появления события A в n испытаниях.

Относительная частота появления события $W(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ является также случайной величиной, математическое ожидание которой равно $M(W(A)) = M\left(\frac{m}{n}\right) = p$, а дисперсия $D(W(A)) = \frac{npq}{n} = pq < 0,5$.

Следовательно, на основании теоремы Чебышева

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 1.$$

Таким образом, при достаточно больших n относительная частота будет приближаться к неизменной вероятности. Это свойство относительной частоты называют устойчивостью.

Закон больших чисел в форме Бернулли дает обоснование статистическому методу задания вероятностей.

На практике теорема Бернулли часто используется в виде неравенства (6.10), которое следует из неравенства (6.8)

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}. \quad (6.10)$$

Приведем без доказательства теорему Пуассона, которая является следствием закона больших чисел.

Теорема Пуассона. Если в последовательности независимых испытаний вероятность появления события A в i -ом испытании равна p_i , а m – число появления события A в n испытаниях, то имеет место неравенство (6.11) для $\forall \varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sum_{i=1}^n p_i \cdot (1 - p_i)}{n^2 \cdot \varepsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}. \quad (6.11)$$

Отсюда следует равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i\right| < \varepsilon\right) = 1. \text{ (без доказательства)} \quad (6.12)$$

Теорема Пуассона имеет важное практическое значение. Вероятностные методы используют для исследования явлений, которые в одних и тех же условиях не могут повториться достаточное количество раз, но многократно повторяются при весьма разнообразных условиях, причем вероятности событий, которые нас интересуют, сильно зависят от этих условий. Например, нельзя рассчитывать на то, что воздушный бой будет осуществляться в данных фиксированных условиях. Несмотря на это, в данном явлении имеет место определенная устойчивость частот, а именно: частота попадания в объект в реальных воздушных боях будет приближаться к средней вероятности поражения объекта, характерной для данной группы условий. Теорема Пуассона устанавливает устойчивость частоты для переменных условий эксперимента.

Пример. Вероятность положительного исхода отдельного эксперимента равна 0,8. Оценить вероятность того, что при 1000 независимых повторных экспериментах отклонение частоты положительных исходов от вероятности при отдельном эксперименте по абсолютной величине будет меньше 0,05.

Решение. Пользуясь неравенством

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n \cdot \varepsilon^2}$$

и данными задачи $p = 0,8$; $q = 0,2$; $n = 1000$; $\varepsilon = 0,05$, получаем

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,8\right| < 0,05\right) \geq 1 - \frac{0,8 \cdot 0,2}{1000 \cdot 0,05^2} = 1 - 0,064 = 0,936.$$

Таким образом, $p \geq 0,936$.

Пример 1. Сколько нужно произвести независимых испытаний, чтобы вероятности выполнения неравенства $\left|\frac{m}{n} - p\right| < 0,06$ превысила 0,78, если вероятность появления данного события в отдельном испытании равна 0,7?

Решение. Используя неравенство $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n \cdot \varepsilon^2}$, где $p = 0,7$; $q = 0,3$; $\varepsilon = 0,06$, получаем

$$1 - \frac{0,7 \cdot 0,3}{n \cdot 0,06^2} \geq 0,78; \quad ,22 \geq \frac{0,21}{n \cdot 0,0036},$$

откуда

$$n \geq \frac{0,21}{0,22 \cdot 0,0036} \approx 265, \quad n \geq 265.$$

Пример 2. Стрельба по мишени ведется по очереди из трех орудий, причем вероятности успеха равны соответственно 0,2; 0,3; 0,5. Таким образом, произвели 300 выстрелов. Оценить снизу вероятность того, что при этом относительная частота отличается от средней вероятности успеха по абсолютной величине не больше, чем на 0,1.

Решение. Используем теорему Пуассона

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sum_{i=1}^n p_i \cdot (1 - p_i)}{n^2 \cdot \varepsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Сначала найдем среднюю вероятность успеха при 300 выстрелах:

$$\bar{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i = \frac{1}{300} (0,2 \cdot 100 + 0,3 \cdot 100 + 0,5 \cdot 100) = \frac{1}{3}.$$

Окончательно получаем

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{3}\right| < 0,1\right) \geq 1 - \frac{1}{4 \cdot 300 \cdot 0,1^2} = 1 - \frac{1}{4 \cdot 3} = \frac{11}{12}, \quad p \geq \frac{11}{12}.$$

6.5 Центральная предельная теорема

В теоремах закона больших чисел были рассмотрены вопросы приближения некоторых случайных величин к определенным предельным значениями независимо от их закона распределения.

В теории вероятностей существует другая группа теорем, которая касается предельных распределений случайной величины, когда количество слагаемых неограниченно возрастает. Эта группа теорем носит общее название центральной предельной теоремы. Она указывает условия, при каких закон распределения суммы большого количества независимых

случайных величин близок к нормальному. Существует много форм центральной предельной теоремы. Эти формы отличаются между собой условиями, которые накладываются на распределения случайных величин, которые составляют сумму. Впервые центральная предельная теорема была сформулирована и доказана А.М. Ляпуновым.

Теорема Ляпунова. Пусть X_n , $n = \overline{1, \infty}$ – последовательность независимых случайных величин, для каждой из которых существует математическое ожидание $M(X_k) = m_k$, дисперсия $D(X_k) = \sigma_k^2$ и третий центральный абсолютный момент $M|X_k - m_k|^3$. Пусть, кроме того, выполнено условие Ляпунова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n M|X_k - m_k|^3}{\left(\sum_{k=1}^n \sigma_k^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Тогда при неограниченном возрастании n распределение случайной величины $y_n = \sum_{k=1}^n x_k$ сходится по вероятности к нормальному распределению с математическим ожиданием $M(Y_n) = \sum_{k=1}^n M(X_k)$ и дисперсией $\sigma_{y_n}^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$, это значит, для $y_n = \sum_{k=1}^n x_k$ при $n \rightarrow \infty$ выполняется соотношение

$$P(Y_n < y) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{Y_n}} \int_{-\infty}^y -\frac{(Y_n - M(Y_n))^2}{2\sigma_{Y_n}^2} dy. \quad (6.13)$$

Доказательство этой теоремы сложное, требует введения аппарата характеристических функций. Поэтому примем ее без доказательства.

Существуют и другие формулировки центральной предельной теоремы. Отличаются они тем, что условие Ляпунова заменено другим требованием. Из условия Ляпунова следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_k^2}{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2} = 0,$$

это значит, дисперсия каждой случайной величины X_n , которая входит в случайную величину $y_n = \sum_{k=1}^n x_k$, составляет малую долю от общей дисперсии.

Другими словами, смысл условий Ляпунова состоит в том, что, несмотря на разные характеристики рассеивания случайных величин X_k , $k = \overline{1, n}$, эти характеристики не должны сильно отличаться между собой по характеру влияния на рассеивание суммы случайных величин X_k , $k = \overline{1, n}$. Часто

говорят, что ни одно из слагаемых, которые входят в $\sum_{k=1}^n X_k$, не доминирует, так как его вклад в долю общей дисперсии не подавляет вклада других.

Центральная предельная теорема имеет место не только для непрерывных, но и для дискретных случайных величин. Практическое значение теоремы Ляпунова огромное. Опыт показывает, что распределение суммы независимых случайных величин, сравнимых по своему рассеиванию, уже при количестве слагаемых порядка десяти является приближенно нормальным.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа (2.11) является частным случаем центральной предельной теоремы для случая суммы дискретных случайных величин.

Литература

1. Герасимович А.И. Математическая статистика – Минск, Высшэйшая школа, 1983.
2. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей – М.: Наука, 1987.
3. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1987.

СОДЕРЖАНИЕ

- I. Определение вероятности и основные правила ее вычисления
 - 1.1 Вероятностный эксперимент. Предмет теории вероятностей
 - 1.2. Пространство элементарных событий
 - 1.3 Элементы комбинаторики
 - 1.4 Классификация событий. Операции над событиями
 - 1.5 Алгебра событий
 - 1.6 Относительная частота
 - 1.7 Аксиоматическое определение вероятности. Вероятностное пространство
 - 1.8 Методы задания вероятностей
 - а) Классический метод задания вероятности
 - б) геометрический метод задания вероятностей.
 - в) Статистический метод задания вероятностей
 - 1.9 Теоремы сложения вероятностей
 - 1.10 Условная вероятность. Независимость событий. Теорема умножения вероятностей
 - 1.11 Формула полной вероятности
 - 1.12 Формула Байесса
2. Повторение экспериментов
 - 2.1 Схема экспериментов Бернулли. Формула Бернулли (биномиальный закон)
 - 2.2 Теорема Пуассона (закон Пуассона)
 - 2.3 Локальная теорема Лапласа
 - 2.4 Интегральная теорема Лапласа
 - 2.5 Вероятность отклонения относительной частоты от неизменной вероятности p появления «успеха» в серии из n независимых испытаний
 - 2.6 Наивероятнейшее число «успехов» в схеме Бернулли
3. Случайные величины. Функции распределения. Плотность распределения
 - 3.1 Понятие случайной величины для дискретных вероятностных пространств и в общем случае
 - 3.2 Функция распределения и ее свойства
 - 3.3 Дискретные случайные величины. Закон распределения. Функция распределения для дискретных случайных величин
 - 3.4 Непрерывные случайные величины. Плотность распределения вероятностей и ее свойства
4. Числовые характеристики случайных величин
 - 4.1 Математическое ожидание дискретных и непрерывных случайных величин
 - 4.2 Основные свойства математического ожидания
 - 4.3 Дисперсия случайной величины и ее свойства
5. Основные законы распределений.
 - а) Дискретные распределения
 - 5.1 Биномиальное распределение
 - 5.2 Распределение Пуассона (пуассоновское распределение)
 - 5.3 Геометрическое распределение
 - б) Непрерывные распределения
 - 5.4 Равномерное распределение
 - 5.5 Экспоненциальное (показательное) распределение
 - 5.6 Нормальное распределение (распределение Гауса). Кривая Гауса
 - 5.7 Математическое ожидание и дисперсия нормального распределения
 - 5.8 Вероятность попадания на заданный интервал нормально распределенной случайной величины
 - 5.9 Вычисление вероятности заданного отклонения нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания
 - 5.10 Правило трех сигм

- 6. Предельные теоремы теории вероятностей
 - 6.1 Сходимость случайных величин
 - 6.2 Неравенство Чебышева
 - 6.3 Теорема Чебышева
 - 6.4 Теорема Бернулли. Теорема Пуассона
 - 6.5 Центральная предельная теорема