

Министерство образования и науки Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Л. И. Магазинников, А. Л. Магазинников

---

# **ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА**

---

Дифференциальное исчисление

Учебное методическое пособие

Томск  
«Эль Контент»  
2013

УДК 517(075.8)  
ББК 22.161.1я73  
М 123

Рецензенты:

**Старенченко В. А.**, докт. физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики Томского государственного архитектурно-строительного университета;

**Ивлев Е. Т.**, канд. физ.-мат. наук, проф. кафедры высшей математики Томского политехнического университета.

**Магазинников Л. И.**

М 123      Высшая математика. Дифференциальное исчисление : учебное методическое пособие / Л. И. Магазинников, А. Л. Магазинников. — Томск : Эль Контент, 2013. — 96 с.

УДК 517(075.8)  
ББК 22.161.1я73

© Магазинников Л. И.,  
Магазинников А. Л. 2013  
© Оформление.  
ООО «Эль Контент», 2013

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|          |                                                                   |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Методические указания</b>                                      | <b>4</b>  |
| 1.1      | Понятие функции. Область определения функции . . . . .            | 4         |
| 1.2      | Предел последовательности . . . . .                               | 8         |
| 1.3      | Предел функции . . . . .                                          | 11        |
| 1.4      | Первый замечательный предел . . . . .                             | 16        |
| 1.5      | Второй замечательный предел . . . . .                             | 18        |
| 1.6      | Следствия второго замечательного предела . . . . .                | 22        |
| 1.7      | Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций . . . . . | 26        |
| 1.8      | Непрерывность функции. Классификация разрывов функции . . . . .   | 32        |
| 1.9      | Техника дифференцирования функций одного аргумента . . . . .      | 36        |
| 1.10     | Производная высших порядков функций одного аргумента . . . . .    | 42        |
| 1.11     | Частные производные . . . . .                                     | 43        |
| 1.12     | Производная по направлению . . . . .                              | 48        |
| 1.13     | Производные параметрически заданных функций . . . . .             | 50        |
| 1.14     | Дифференцирование функций, заданных неявно . . . . .              | 51        |
| 1.15     | Геометрический и механический смысл производной . . . . .         | 55        |
| 1.16     | Дифференциал . . . . .                                            | 59        |
| 1.17     | Экстремумы. Наибольшие и наименьшие значения функции . . . . .    | 67        |
| 1.18     | Исследование функций и построение графиков . . . . .              | 75        |
| <b>2</b> | <b>Контрольная работа №2</b>                                      | <b>76</b> |
|          | <b>Приложение А Ответы на задачи для самостоятельного решения</b> | <b>89</b> |

---

# Глава 1

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

---

### 1.1 Понятие функции. Область определения функции

Предлагается изучить пп. 1.1, 1.2, 1.3 учебного пособия и ознакомиться с решением следующих задач.

**1.1.1** Пусть  $f(x+3) = x^2 + 4x + 5$ . Найдите  $f(x)$ .

*Решение.* Преобразуем выражение  $A = x^2 + 4x + 5$ . Можем записать:

$$\begin{aligned} A &= (x+3)^2 - 6x - 9 + 4x + 5 = (x+3)^2 - 2x - 4 = \\ &= (x+3)^2 - 2(x+3) + 6 - 4 = (x+3)^2 - 2(x+3) + 2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $f(x) = x^2 - 2x + 2$ .

**1.1.2** Дано, что  $f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + 4$ . Найдите  $f(x)$ .

*Решение.* Обозначим  $\frac{1}{x} = u$ . Тогда  $x = \frac{1}{u}$ ,  $f(u) = \frac{1}{u^2} + 4 = \frac{4u^2 + 1}{u^2}$ . Обозначая аргумент через  $x$ , получим  $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{x^2}$ .

**1.1.3** Даны функции  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$ ,  $\varphi(x) = \frac{1}{x+1}$ . Найдите  $f[f(x)]$ ,  $\varphi[\varphi(x)]$ ,  $f[\varphi(x)]$ ,  $\varphi[f(x)]$ .

*Решение.*

$$f[f(x)] = \frac{\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}\right)^2 - 1}{\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}\right)^2 + 3} = \frac{(x^2 - 1)^2 - (x^2 + 3)^2}{(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 + 3)^2} = -\frac{2(x^2 + 1)}{x^4 + 4x^2 + 7};$$

$$\varphi[\varphi(x)] = \frac{1}{\frac{1}{x+1} + 1} = \frac{x+1}{2+x}; \quad f[\varphi(x)] = \frac{\left(\frac{1}{x+1}\right)^2 - 1}{\frac{1}{(x+1)^2} + 3} = \frac{1 - (x+1)^2}{1 + 3(x+1)^2};$$

$$\varphi[f(x)] = \frac{1}{\frac{x^2-1}{x^2+3} + 1} = \frac{x^2+3}{2x^2+2}.$$

**1.1.4** Даны функции  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $\varphi(x) = \sin x$ . Найдите  $f[f(x)]$ ,  $\varphi[\varphi(x)]$ ,  $f[\varphi(x)]$ ,  $\varphi[f(x)]$ .

*Решение.*  $f[f(x)] = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$ ;  $\varphi[\varphi(x)] = \sin(\sin x)$ ;  $f[\varphi(x)] = \sqrt{\sin x}$ ;  $\varphi[f(x)] = \sin(\sqrt{x})$ .

**1.1.5** Найдите область определения следующих функций:

а)  $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} + \frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$ ;    б)  $f(x) = \sqrt{\lg \frac{5x - x^2}{4}}$ .

*Решение.* а) область определения данной функции состоит из тех значений  $x$ , для которых оба слагаемых принимают действительные значения. Должны выполняться два условия:

$$\begin{cases} (x^2 - x - 2) \geq 0, \\ (3 + 2x - x^2) > 0. \end{cases}$$

Корнями квадратного уравнения  $x^2 - x - 2 = 0$  являются числа  $-1$  и  $2$ , а уравнения  $3 + 2x - x^2 = 0$  — числа  $-1$  и  $3$ . Поэтому данная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} (x+1)(x-2) \geq 0, \\ (x+1)(x-3) < 0. \end{cases}$$

Используя метод интервалов, находим, что первое неравенство выполняется на лучах  $(-\infty, -1]$  и  $[2, +\infty)$ , а второе — в интервале  $(-1, 3)$ . Общей частью этих трёх множеств является множество  $[2, 3)$ , которое и является областью определения данной функции;

б) функция  $f(x) = \sqrt{\lg \frac{5x - x^2}{4}}$  принимает действительные значения, если  $\lg \frac{5x - x^2}{4} \geq 0$ , т. е. если  $\frac{5x - x^2}{4} \geq 1$ , или  $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4) \leq 0$ . Решая последнее неравенство, находим, что областью определения является отрезок  $[1, 4]$ .

**1.1.6** Найдите область определения следующих векторных функций скалярного аргумента:

а)  $f(x) = \begin{bmatrix} x^2 \\ \lg \frac{1}{x+1} \end{bmatrix}$ ,    б)  $\varphi(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \\ \arccos \frac{x+1}{4} \end{bmatrix}$ .

*Решение.* Чтобы найти область определения векторной функции, нужно найти области определения каждой координатной функции и взять их общую часть.

В случае а) имеем:  $f_1(x) = x^2$ ,  $f_2(x) = \lg \frac{1}{x+1}$ . Функция  $f_1(x)$  определена на всей числовой оси  $(-\infty, +\infty)$ , а функция  $f_2(x)$  определена при  $\frac{1}{x+1} > 0$ , т. е. при  $x > -1$  или в  $(-1, +\infty)$ . Этот луч и является областью определения функции  $f(x)$ .

В случае б)  $f_1(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ . Эта функция определена на отрезке  $[2, 4]$ , функция  $f_2(x) = \arccos \frac{x+1}{4}$  определена при  $\left| \frac{x+1}{4} \right| \leq 1$ , т. е.  $|x+1| \leq 4$  или  $-4 \leq x+1 \leq 4$ . Получаем отрезок  $[-5, 3]$ . Этот отрезок с отрезком  $[2, 4]$  имеет общую часть  $[2, 3]$ . Отрезок  $[2, 3]$  является областью определения функции  $\varphi(x)$ .

**1.1.7** Найдите область определения векторной функции векторного аргумента

$$f: X \subset R_2 \rightarrow Y \subset R_2: f(x, y) = \begin{bmatrix} x + \arcsin y \\ y + \arcsin x \end{bmatrix}.$$

*Решение.* Область определения этой функции является пересечением областей определения координатных функций  $f_1(x, y) = x + \arcsin y$  и  $f_2(x, y) = y + \arcsin x$ . Первая из них определена в полосе  $-1 \leq y \leq 1$ , а вторая — в полосе  $-1 \leq x \leq 1$ . Эти полосы пересекаются по замкнутому квадрату со сторонами  $x = \pm 1$  и  $y = \pm 1$ , который и является областью определения данной функции.

**1.1.8** Функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[2, 4]$ . Какова область определения функций: а)  $f(8x^2)$ , б)  $f(x-3)$ ?

*Решение.* а) функция  $f(8x^2)$  является композицией функций  $u = 8x^2$  и  $f(u)$ . Область значений функции  $u = 8x^2$  должна входить в область определения функции  $f(u)$ , поэтому  $2 \leq 8x^2 \leq 4$ , т. е.  $1/4 \leq x^2 \leq 1/2$ . Отсюда следует, что множество  $[-1/\sqrt{2}, -1/2] \cup [1/2, 1/\sqrt{2}]$  является областью определения функции  $f(8x^2)$ ;

б) функция  $f(x-3)$  определена при всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $2 \leq x-3 \leq 4$ , т. е. на отрезке  $[5, 7]$ .

**1.1.9** Докажите, что функция  $f_1(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$  является нечётной,  $f_2(x) = x \frac{3^x+1}{3^x-1}$  чётна, а функция  $f_3(x) = 2x^3 - x + 1$  общего вида (не является ни чётной, ни нечётной).

*Решение.*

$$\begin{aligned} f_1(-x) &= \lg \frac{1+x}{1-x} = \lg \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{-1} = -\lg \frac{1-x}{1+x} = -f_1(x); \\ f_2(-x) &= -x \frac{3^{-x}+1}{3^{-x}-1} = -x \frac{1/3^x+1}{1/3^x-1} = -x \frac{3^x+1}{1-3^x} = x \frac{3^x+1}{3^x-1} = f_2(x), \end{aligned}$$

т. е. функция  $f_1(x)$  нечётна, а  $f_2(x)$  чётна;

$f_3(-x) = -2x^3 + x + 1$ . Видим, что  $f_3(x) \neq -f_3(-x)$  и  $f_3(-x) \neq f_3(x)$ , т. е. функция  $f_3(x)$  общего вида.

**1.1.10** Докажите, что если  $f(x)$  — периодическая функция с периодом  $T$ , то функция  $f(ax)$  также периодическая с периодом  $T/a$ .

Действительно,  $f[a(x+T/a)] = f(ax+T) = f(ax)$ , т. е.  $T/a$  — один из периодов функции  $f(ax)$ .

**1.1.11** Найдите период функции  $f(x) = \cos^2 x$ .

*Решение.* Можем записать:  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ . Видим, что период функции  $\cos^2 x$  совпадает с периодом функции  $\cos 2x$ . Так как период функции  $\cos x$  равен  $2\pi$ , то согласно задаче 1.1.10 период функции  $\cos 2x$  равен  $\pi$ .

### Задачи для самостоятельного решения

- 1.1.12** Пусть  $f(x) = x^2$  и  $\varphi(x) = 2^x$ . Найдите: а)  $f[\varphi(x)]$ , б)  $\varphi[f(x)]$ .
- 1.1.13** Найдите  $f(x+1)$ , если  $f(x-1) = x^2$ .
- 1.1.14** Дана функция  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ . Найдите:  $\varphi(x) = f\{f[f(x)]\}$ .
- 1.1.15** Найдите области определения следующих функций:  
а)  $f(x) = \sqrt{x+1}$ ; б)  $f(x) = \lg \frac{2+x}{2-x}$ ;  
в)  $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$ ; г)  $f(x) = \sqrt{\arcsin(\log_2 x)}$ .
- 1.1.16** Постройте область определения следующих функций:  
а)  $f(x, y) = \log_2(x+y)$ ; б)  $f(x, y) = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{4-y^2}$ ;  
в)  $f(x, y) = \arcsin \frac{x^2+y^2}{4}$ ; г)  $f(x, y) = \sqrt{xy}$ .
- 1.1.17** Найдите область определения следующих функций:  
а)  $f(x) = \begin{bmatrix} 1 - \lg x \\ 1 \\ \sqrt{x^2 - 4x} \end{bmatrix}$ ; б)  $f(x) = \begin{bmatrix} \arcsin \frac{3-2x}{5} \\ \sqrt{3-x} \end{bmatrix}$ .
- 1.1.18** Найдите и постройте область определения следующих функций:  
а)  $f(x, y) = \begin{bmatrix} \sqrt{4x-y^2} \\ \lg(1-x^2-y^2) \end{bmatrix}$ ; б)  $f(x, y) = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2+2x+y^2} \\ \sqrt{x^2-2x+y^2} \end{bmatrix}$ .
- 1.1.19** Докажите, что функции:  
а)  $f_1(x) = 2^{-x^2}$  и  $f_2(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$  — чётные;  
б)  $\varphi_1(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$  и  $\varphi_2(x) = \frac{3^x + 1}{3^x - 1}$  — нечётные;  
в)  $\psi_1(x) = \sin x - \cos x$  и  $\psi_2(x) = 2^{x-x^2}$  — общего вида.
- 1.1.20** Даны функции: а)  $y = \sin^2 x$ ; б)  $y = \sin x^2$ ; в)  $y = 1 + \operatorname{tg} x$ ; г)  $y = \sin \frac{1}{x}$ .  
Какие из них являются периодическими?
- 1.1.21** Докажите, что функция  $y = \frac{2^x}{1+2^x}$  имеет обратную, и найдите её.
- 1.1.22** Докажите, что функция  $y = x^2 - 2x$  имеет две обратных:  
 $y_1 = 1 + \sqrt{x+1}$  и  $y_2 = 1 - \sqrt{x+1}$ .

**1.1.23** Постройте графики следующих функций:

$$а) f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } -\infty < x < 1; \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, & \text{если } 1 \leq x \leq 3; \\ 4, & \text{если } 3 < x < +\infty; \end{cases}$$

$$б) f(x) = |x - 1| + |x + 3|; \quad в) f(x) = |x^2 - 2x + 1|;$$

$$г) f(x) = \sin x + |\sin x|, \text{ если } 0 \leq x \leq 3\pi; \quad д) f(x) = \arccos(\cos x);$$

$$е) f(t) = \begin{bmatrix} t+5 \\ t-7 \end{bmatrix}; \quad ж) f(t) = \begin{bmatrix} t+1 \\ t^2+2t+2 \end{bmatrix}.$$

**1.1.24** Охарактеризуйте вид графика следующих функций:

$$а) z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}; \quad б) z = x^2 + y^2;$$

$$в) z = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad г) z = x^2 - y^2.$$

**1.1.25** Начертите линии уровня данных функций, придавая  $z$  значения от  $-3$  до  $+3$  через  $1$ : а)  $z = xy$ ; б)  $z = y(x^2 + 1)$ .

**1.1.26** Постройте графики функций:

$$а) y = 2\sqrt{-3(x+1)} - 0,5 \text{ с помощью преобразования графика функции } y = \sqrt{x};$$

$$б) y = 3 \sin(2x - 4) \text{ с помощью преобразования графика функции } y = \sin x.$$

## 1.2 Предел последовательности

Предлагается изучить п. 1.5.2 учебного пособия.

**1.2.1** Исходя из определения предела последовательности, докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

*Решение.* Пусть  $U_\varepsilon(0)$  любая  $\varepsilon$ -окрестность точки  $0$ . Требуется, согласно определению предела последовательности, найти окрестность символа  $+\infty$  такую, что если  $n \in V_M(+\infty)$ , т.е.  $n > M$ , то должно выполняться  $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$ , т.е.  $\frac{1}{n} < \varepsilon$  или  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ . Видим, что можно принять  $M = \frac{1}{\varepsilon}$ . Если выполнено  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ , то  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ . Это и означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

Теоремы о пределе суммы, произведения и частного, сформулированные для функций непрерывного аргумента, переносятся и на последовательности. Применяя результаты решения задачи 1.2.1 и теорему о пределе произведения последовательностей, легко находим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Учитывая непрерывность функции  $f(x) = x^\lambda$ ,  $\lambda > 0$  и применяя теорему о пределе частного, получаем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\lambda} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} n^\lambda} = 0$  при  $\lambda > 0$ .



**1.2.2** Найдите пределы следующих последовательностей:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 5n + 4}{n^2 + 7}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 3}{n^3 + 5n^2 + 4};$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 4n + 1}{n^2 + n + 5}; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^4 + 2n^3 + 3}{2n^4 + 3n^2 + 2} \right)^2.$$

*Решение.* В примерах а, б, в делим числитель и знаменатель на старшую степень величины  $n$ . Получаем:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 5n + 4}{n^2 + 7} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 5/n + 4/n^2}{1 + 7/n^2} = 2$$

(применили теорему о пределе частного, суммы и то, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2} = 0$ );

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 3}{n^3 + 5n^2 + 4} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n - 2/n^2 + 3/n^3}{1 + 5/n + 4/n^3} = 0;$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 4n + 1}{n^2 + n + 5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 4/n^2 + 1/n^3}{1/n + 1/n^2 + 5/n^3} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right) \cdot \frac{1}{1/n + 1/n^2 + 5/n^3} = 1 \cdot \infty = \infty; \end{aligned}$$

г) учитывая непрерывность функции  $y = x^2$ , получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^4 + 2n^3 + 3}{2n^4 + 3n^2 + 2} \right)^2 &= \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^3 + 3}{2n^4 + 3n^2 + 2} \right)^2 = \\ &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2/n + 3/n^4}{2 + 3/n^2 + 2/n^4} \right)^2 = \left( \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

**1.2.3** Найдите следующие пределы:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3 + 2n^2 - 1}}{n + 3}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^3 + 2n^2}}{(n + 3)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Решение. а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3 + 2n^2 - 1}}{n + 3} &= \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \frac{\sqrt[3]{(8n^3 + 2n^2 - 1)/n^3}}{(n + 3)/n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8 + 2/n - 1/n^3}}{1 + 3/n} = 2 \end{aligned}$$

(поделили числитель и знаменатель на  $n$ , величину  $n$  подвели под знак корня, применили теорему о пределе частного, использовали непрерывность функции  $\sqrt[3]{u}$ , применили теорему о пределе суммы);

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^3 + 2n^2}}{(n + 3)} &= \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[4]{n^3 + 2n^2})/n}{(n + 3)/n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^3/n^4 + 2n/n^4}}{1 + 1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{1/n + 2/n^3}}{1 + 1/n} = 0 \end{aligned}$$

(обоснование всех операций сделать самостоятельно).

**1.2.4** Найдите следующие пределы:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 6n + 8} - n); \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 4}).$$

Решение этих примеров основано на применении формул  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$  и  $(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ :

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 6n + 8} - n) &= (\infty - \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 6n + 8} - n)(\sqrt{n^2 + 6n + 8} + n)}{\sqrt{n^2 + 6n + 8} + n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 6n + 8 - n^2}{\sqrt{n^2 + 6n + 8} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6n + 8)/n}{(\sqrt{n^2 + 6n + 8} + n)/n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6 + 8/n)}{(\sqrt{1 + 6/n + 8/n^2} + 1)} = \frac{6}{1 + 1} = 3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 4}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{n^3 + 1})^3 - (\sqrt[3]{n^3 + 4})^3}{\sqrt[3]{(n^3 + 1)^2} + \sqrt[3]{(n^3 + 1)(n^3 + 4)} + \sqrt[3]{(n^3 + 4)^2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 1 - n^3 - 4}{\sqrt[3]{(n^3 + 1)^2} + \sqrt[3]{(n^3 + 1)(n^3 + 4)} + \sqrt[3]{(n^3 + 4)^2}} = 0. \end{aligned}$$

В приведённых примерах мы имели неопределённость вида  $\infty - \infty$ . При этом может получиться предел конечный, отличный от нуля, равный нулю или бесконечный.

**1.2.5** Найдите:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \frac{n^2}{n^2 + 4} \\ \frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{n} + 2} \end{bmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2}{n^2 + 4} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{n} + 2} \mathbf{j} \right);$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n}{n+1} \mathbf{i} + \frac{1-4n}{2n+1} \mathbf{j} + \frac{n+5}{n-6} \mathbf{k} \right|.$$

*Решение.* а) имеем векторную последовательность. Её пределом, согласно теории, является вектор, координаты которого равны пределам координатных последовательностей. Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \frac{n^2}{n^2 + 4} \\ \frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{n} + 2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 4} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{n} + 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 4/n^2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + 2/\sqrt{n}} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \mathbf{i} + \frac{1}{3} \mathbf{j}; \end{aligned}$$

б) пусть дан вектор  $\mathbf{a}_n = \{x_n, y_n, z_n\}$ , тогда  $|\mathbf{a}_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2}$ . Учитывая, что функции  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  и  $\varphi(x) = x^2$  непрерывны, получаем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{a}_n| = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} z_n^2}$ .

Поэтому

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n}{n+1} \mathbf{i} + \frac{1-4n}{2n+1} \mathbf{j} + \frac{n+5}{n-6} \mathbf{k} \right| &= \sqrt{\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} \right)^2 + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-4n}{2n+1} \right)^2 + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+5}{n-6} \right)^2} = \\ &= \sqrt{\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1+1/n} \right)^2 + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n-4}{2+1/n} \right)^2 + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+5/n}{1-6/n} \right)^2} = \\ &= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4+4+1} = 3.\end{aligned}$$

### Задачи для самостоятельного решения

**1.2.6** Исходя из определения предела последовательности, докажите, что:

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+3} = 1$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+4} = 0$ .

**1.2.7–1.2.9** Найдите следующие пределы, обосновывая каждую операцию:

**1.2.7** а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 5n^2 + n + 1}{n^3 - 2n + 2}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)(n+5)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ ;

в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 4}{n^3 + 5n + 3}$ ; г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3 - 2n^2 + 1}{2n^3 + 6} \right)^3$ .

**1.2.8** а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{16n^4 + 2n^3 + 3}}{n+5}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+5} - 2}{\sqrt{18n+1} - 3}$ ;

в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5 + 2} - \sqrt[3]{n^2 + 1}}{\sqrt[3]{n^4 + 2} - \sqrt{n^3 + 1}}$ ; г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 - 2n^2 + 1} + \sqrt[3]{n^4 + 1}}{\sqrt[4]{n^{10} + 6n^5 + 2} - \sqrt[5]{n^7 + 3n^3 + 1}}$ .

**1.2.9** а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n+5} - \sqrt{n})$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n + 1} - \sqrt{n^2 + 1})$ ;

в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 4n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 6n^2 + 2})$ ;

г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2})$ .

## 1.3 Предел функции

Рекомендуется изучить подразделы 1.4, 1.5.1, 1.5.2, 1.5.5 и 1.6.1 учебного пособия. Особенно хорошо надо освоить подраздел 1.4 учебного пособия и знать все типы окрестностей, их обозначения и формы записи в виде неравенств.

**1.3.1** Используя теоремы о пределе произведения суммы и частного, докажите, что:

а)  $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow x_0} P_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n) =$   
 $= a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_0 + a_n$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m} =$   
 $= \frac{a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_0 + a_n}{b_0 x_0^m + b_1 x_0^{m-1} + \dots + b_{m-1} x_0 + b_m},$

где  $n$  и  $m$  — натуральные числа,  $a_i$  и  $b_i$  — константы,  $b_0 x_0^m + b_1 x_0^{m-1} + \dots + b_{m-1} x_0 + b_m \neq 0$ ,  $x_0$  — конечно.

*Решение.* а) можем записать:  $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = \lim_{x \rightarrow x_0} (x \cdot x \cdot \dots \cdot x)$ . Так как  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ , то по теореме о пределе произведения

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = \lim_{x \rightarrow x_0} x \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} x \cdot \dots \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0^n;$$

б) функция  $P_n(x)$  представляет собой сумму  $(1 + n)$  слагаемых, каждое из которых имеет конечный предел, например  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_0 x^n = \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 \lim_{x \rightarrow x_0} x_n = a_0 x_0^n$ . Поэтому

б) следует из теоремы о пределе суммы;

в) следует из теоремы о пределе частного, суммы и произведения.

Функцию  $P_n(x)$  в задаче 1.3.1 называют многочленом или полиномом порядка  $n$  (если  $a_0 \neq 0$ ).

**1.3.2** Вычислите следующие пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x + 4)$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 + 4x - 5}$ .

*Решение.* На основе доказанного в задаче 1.3.1, б) можем записать:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x + 4) &= 2^2 + 3 \cdot 2 + 4 = 14; \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 + 4x - 5} &= \frac{3^2 + 2 \cdot 3 - 3}{2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 5} = \frac{12}{25}. \end{aligned}$$

**1.3.3** Найдите  $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 20x + 15}{3x^2 - 15x + 12}$ .

*Решение.* В данном случае применить теорему о пределе частного невозможно, так как знаменатель обращается при  $x_0 = 1$  в нуль. Заметим, что и числитель при  $x_0 = 1$  также обращается в нуль. Получаем неопределённое выражение типа  $0/0$ . Мы уже подчёркивали, что в определении предела при  $x \rightarrow x_0$  величина  $x$  значение  $x_0$  никогда не принимает. В нашем примере  $x \neq 1$ , а потому  $x - 1 \neq 0$ . Разлагая на множители числитель и знаменатель, получаем

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 20x + 15}{3x^2 - 15x + 12} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1)(x-3)}{3(x-1)(x-4)}.$$

Поделим числитель и знаменатель на величину  $x - 1$ , отличную от нуля. Получим

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-3)}{3(x-4)} = \frac{5(1-3)}{3(1-4)} = \frac{10}{9}.$$

**1.3.4** Найдите  $A = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 - 3x^2 - 45x - 81}$ .

*Решение.* Убеждаемся, что числитель и знаменатель в точке  $x_0 = -3$  обращаются в нуль. По теореме Безу многочлены в числителе и знаменателе делятся на  $(x + 3)$ . Выполняя это деление, получаем

$$A = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x^2 + 2x - 3)}{(x+3)(x^2 - 6x - 27)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 2x - 3)}{(x^2 - 6x - 27)}$$

(числитель и знаменатель разделили на  $x + 3 \neq 0$ ). Замечаем, что числитель и знаменатель опять обращаются в нуль при  $x_0 = -3$ . Находим

$$A = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-9)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-1)}{(x-9)} = \frac{-3-1}{-3-9} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

**1.3.5** Найдите  $A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 4}{3x + 5}$ .

*Решение.* Поделим числитель и знаменатель на  $x$ . Получим  $A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 4/x}{3 + 5/x}$ . По теореме о пределе частного и суммы и учитывая, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x} = 0$ , находим

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 4/x}{3 + 5/x} = \frac{2}{3}.$$

**1.3.6** Найдите  $A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + 2x^3 - 14}{5x^4 + x^3 + x^2 - 1}$ .

*Решение.* Поделив числитель и знаменатель на  $x^4$ , получим

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 + 2/x - 14/x^4}{5 + 1/x + 1/x^2 - 1/x^4}.$$

Затем применяем теоремы о пределе суммы, произведения и частного. Учитывая, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14}{x^4} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4} = 0,$$

получаем, что  $A = \frac{7}{5}$ .

**1.3.7** Найдите  $A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^3 + 4x + 2}$ .

*Решение.* Поделим числитель и знаменатель на  $x^4$ . Получим

$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2/x^2 + 1/x^4}{1/x + 4/x^3 + 2/2x^4} = \infty$ , поскольку числитель стремится к единице, а знаменатель — к нулю.

В частных случаях, встречающихся довольно часто, функция  $f(x)$  может быть определена во всей окрестности  $V(x_0)$ , включая и  $x_0$ . Если при этом окажется, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  существует и равен  $f(x_0)$ , т. е.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , то функция называется непрерывной в точке  $x_0$ .

В задаче 1.3.1 мы доказали непрерывность многочлена. Доказано, что все элементарные функции непрерывны в каждой внутренней точке их области определения.

В граничных точках возможна односторонняя непрерывность. Эти точки подлежат дополнительному исследованию.

Для непрерывных функций в точке  $x_0$  справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) = f(x_0), \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] &= f[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)] = f[\varphi(\lim_{x \rightarrow x_0} x)] = f[\varphi(x_0)], \end{aligned}$$

т. е. символы  $f$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0}$  для непрерывных функций перестановочны. Этим свойством мы будем широко пользоваться при отыскании пределов, например,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^4 + 3x + 10} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} (x^4 + 3x + 10)} = \sqrt{81 + 9 + 10} = 10.$$

Использованы непрерывность функции  $y = \sqrt{u}$  и теорема о пределе суммы.

**1.3.8** Найдите  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{9x^2 + 1}}{x}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{9x^2 + 1}}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{\sqrt{9x^2 + 1}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 - \sqrt{\frac{9x^2 + 1}{x^2}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 - \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} \right) = 1 - \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 9 + \frac{1}{x^2} \right)} = 1 - 3 = -2. \end{aligned}$$

Напомним, что  $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2b}, & \text{если } a > 0; \\ -\sqrt{a^2b}, & \text{если } a < 0. \end{cases}$  По этой причине  $\frac{\sqrt{9x^2 + 1}}{x} = -\sqrt{\frac{9x^2 + 1}{x^2}}$ , поскольку  $x \rightarrow -\infty$ , а потому  $x < 0$ .

**1.3.9** Докажите самостоятельно:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{9x^2 + 1}}{x} = 4$ .

Из задач 1.3.8 и 1.3.9 следует, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{9x^2 + 1}}{x}$  не существует.

**1.3.10** Найдите  $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x} - \sqrt{7x-3}}$ .

*Решение.* Замечаем, что числитель и знаменатель при  $x \rightarrow 1$  стремятся к нулю, т. е. имеем неопределённость типа  $0/0$ . Умножим числитель и знаменатель на множители, сопряжённые соответствующим выражениям:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+8} - \sqrt{8x+1})(\sqrt{x+8} + \sqrt{8x+1})(\sqrt{5-x} + \sqrt{7x-3})}{(\sqrt{5-x} - \sqrt{7x-3})(\sqrt{5-x} + \sqrt{7x-3})(\sqrt{x+8} + \sqrt{8x+1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+8-8x-1)(\sqrt{5-x} + \sqrt{7x-3})}{(5-x-7x+3)(\sqrt{x+8} + \sqrt{8x+1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7(1-x)}{8(1-x)} \cdot \frac{\sqrt{5-x} + \sqrt{7x-3}}{\sqrt{x+8} + \sqrt{8x+1}} = \frac{7}{8} \cdot \frac{2+2}{3+3} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались непрерывностью функции  $\sqrt{x}$  и теоремой о пределе частного и суммы.

**1.3.11** Найдите  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{3x-2}}{x-1}$ .

*Решение.* Применим формулу  $(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ . Полагая  $a = \sqrt[3]{2x-1}$ ,  $b = \sqrt[3]{3x-2}$ , умножим числитель и знаменатель на неполный квадрат суммы чисел  $a$  и  $b$ . Получим

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1-3x+2}{(x-1) \left( \sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{(2x-1)(3x-2)} + \sqrt[3]{(3x-2)^2} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{(x-1) \left( \sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{(2x-1)(3x-2)} + \sqrt[3]{(3x-2)^2} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{(2x-1)(3x-2)} + \sqrt[3]{(3x-2)^2}} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(Применили теоремы о пределе частного, суммы и произведения, а также непрерывность функций  $u^2$  и  $\sqrt[3]{u}$ .)

**1.3.12** Найдите  $\lim_{x \rightarrow 0+0} 3^{1/x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0-0} 3^{1/x}$ .

*Решение.* Сделаем замену  $t = 1/x$ . Если  $x \rightarrow 0+0$ , то  $t \rightarrow +\infty$ , если  $x \rightarrow 0-0$ , то  $t \rightarrow -\infty$  (см. пример 1.13, в, з, п. 1.5.1 учебного пособия). По свойству показательной функции  $y = a^x$  при  $a > 1$  получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} 3^{1/x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 3^t = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} 3^{1/x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} 3^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^t} = 0.$$

Как видим, предел  $\lim_{x \rightarrow 0} 3^{1/x}$  не существует.

**1.3.13** Найдите  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{1/x} - 1}{7^{1/x} - 1}$ .

*Решение.* Найдём правый и левый пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{5^{1/x} - 1}{7^{1/x} - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{5^{1/x} - 1}{7^{1/x} - 1}.$$

Сделаем замену  $t = \frac{1}{x}$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{5^{1/x} - 1}{7^{1/x} - 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5^t - 1}{7^t - 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(5/7)^t - 1/7^t}{1 - 1/7^t} = 0.$$

Мы воспользовались свойством показательной функции  $y = a^x$ : при  $a < 1$  справедливо  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ , при  $a > 1$  —  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ , а также теоремой о пределе частного.

Аналогично получаем  $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{5^{1/x} - 1}{7^{1/x} - 1} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{5^t - 1}{7^t - 1} = 1$ .

По свойству показательной функции при  $a > 1$  следует, что  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^t = 0$ . Мы показали, что существуют конечные правый и левый пределы, но они неравны. Следовательно, предел не существует.

Итак, мы познакомились с понятием предела функции  $f(x)$ . Если функция в точке  $x_0$  непрерывна, то отыскание предела  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  не представляет труда. Он равен  $f(x_0)$ . Если же свойство непрерывности нарушено, то могут возникнуть неопределённости вида  $0/0$ ,  $\infty/\infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $\infty^0$ ,  $0^0$ ,  $1^\infty$ . С первыми двумя типами неопределённостей мы уже встретились. Другие рассмотрим позднее.

### Задачи для самостоятельного решения

**1.3.14** Исходя из определения предела, докажите, что:

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = 0$ ;

д)  $\lim_{x \rightarrow 1-0} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ ; е)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} \neq 2$ ; ж)  $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$ .

**1.3.15** Найдите: а)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 4x - 5)$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^4 - 8x^2 + 28}{x^3 + 1}$ , обосновывая ссылками на соответствующие теоремы каждую операцию.

**1.3.16** Найдите следующие пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 3x + 2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$ .

**1.3.17** Найдите следующие пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[4]{x}}{1 - \sqrt[6]{x}}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[5]{x}}$ .

Указание. В примере а) сделать замену  $x = t^{12}$ , в примере б) —  $x = t^{15}$ . Использовать формулу  $a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1})$ .

**1.3.18** Найдите следующие пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 7x^2 + 4x + 1}{6x^4 + 5x^3 - 2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2} \right)^3$ ;  
в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x + 1}{x^3 + x^2 + 5}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x^2 + 1}{2x^2 + 1}$ .

**1.3.19** Найдите пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + \sqrt{16x^6 + 5}}{x^3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + \sqrt{16x^6 + 5}}{x^3}$ .

**1.3.20** Найдите пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - 2}{x - 2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{9+5x+4x^2} - 3}{x}$ ;  
в)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{10-x} - 2}{x - 2}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{4x-3} - 1}$ .

**1.3.21** Найдите пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$ ;  
в)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x})$ .

Указание. Прибавить и вычесть  $x$ .

**1.3.22** Найдите пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 3+0} 2^{\frac{1}{x-3}}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 3-0} 2^{\frac{1}{x-3}}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{3^{\frac{1}{x-2}} + 1}{4^{\frac{1}{x-2}} + 2}$ .

## 1.4 Первый замечательный предел

Предлагается изучить п. 1.7.1 учебного пособия.

Обратите внимание на то, что в первом замечательном пределе  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  раскрывается неопределенность  $0/0$ , причем аргумент синуса стремится к нулю, и в знаменателе находится точно этот аргумент. Непосредственным следствием первого замечательного предела являются следующие пределы:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$ . Действительно,



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(мы использовали теорему о пределе произведения и непрерывность функции  $\cos x$ , из которой следует, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos \lim_{x \rightarrow 0} x = 1$ ).

Для отыскания второго предела сделаем замену  $\arcsin x = y$ ,  $x = \sin y$ . Если  $x \rightarrow 0$ , то  $y \rightarrow 0$ , что следует из непрерывности функции  $\arcsin x$ .

Находим  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{(\sin y)/y} = 1$ . Аналогично доказывается,

что  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$  (замена  $\operatorname{arctg} x = y$ ).

**1.4.1** Найдите следующие пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\operatorname{arctg} 4x}$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin x}{x}$ .

*Решение.* а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{5 \sin u}{u} = 5$ , ( $u = 5x$ );

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3}{\frac{\operatorname{tg} 5x}{5x} \cdot 5} = \frac{3}{5}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\operatorname{arctg} 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\arcsin 3x}{3x} \cdot 3}{\frac{\operatorname{arctg} 4x}{4x} \cdot 4} = \frac{3}{4}$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 2$ ;

д)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin 2}{2}$ .

**1.4.2** Найдите следующие пределы, сделав подходящую замену:

а)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sin(x - \pi/6)}{\sqrt{3}/2 - \cos x}$ .

*Решение.* а) поскольку непосредственное применение первого замечательного предела невозможно, так как аргумент синуса не стремится к нулю, то сделаем замену  $x = y + \pi$ . Когда  $x \rightarrow \pi$ , то  $y \rightarrow 0$ . Теперь

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(3y + 3\pi)}{\sin(2y + 2\pi)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin 3y}{\sin 2y} = -\frac{3}{2};$$

б) используем формулу тригонометрии  $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ , затем делаем замену  $y = \frac{\pi}{4} - x$ ,  $x = \frac{\pi}{4} - y$ .

Имеем

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos 2x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \sin y}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \sin y}{\sin 2y} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos \frac{\pi}{6} - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{2 \sin\left(\frac{x + \pi/6}{2}\right) \sin\left(\frac{x - \pi/6}{2}\right)} = \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{2 \sin\left(\frac{y + \pi/3}{2}\right) \sin \frac{y}{2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{2 \sin\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin \frac{y}{2}} = 2
 \end{aligned}$$

(замена:  $y = x - \frac{\pi}{6}$ ,  $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$ ).

### Задачи для самостоятельного решения

1.4.3–1.4.6 Найдите следующие пределы.

$$\begin{aligned}
 \text{1.4.3 а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x}; \\
 \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{\operatorname{arctg} 3x}; \text{ е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}. \\
 \text{1.4.4 а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2 \sin x - \cos x}{1 + 3 \sin x - \cos x}; \\
 \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 3x}{x^2}; \\
 \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}; \text{ е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}. \\
 \text{1.4.5 а) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin(x - \pi/3)}{1 - 2 \cos x}; \\
 \text{в) } \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{\cos(x + \pi/6)}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi/2 - x) \operatorname{tg} x. \\
 \text{1.4.6 а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\operatorname{tg} x}; \\
 \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x) \cdot \sqrt{\cos 2x}}{x^2}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a + 2x) - 2 \sin(a + x) + \sin a}{x^2}.
 \end{aligned}$$

## 1.5 Второй замечательный предел

Предлагается изучить п. 1.7.2 учебного пособия.

Каждый из пределов  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  ( $n$  – натурально),  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  называют вторым замечательным пределом. Здесь  $e$  – число Эйлера,  $e = 2,718281828\dots$

1.5.1 Докажите справедливость следующих утверждений:

а) если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [1 + \alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e; \quad (1.1)$$

б) если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)\varphi(x)$  существует, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [1 + \alpha(x)]^{\varphi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)\varphi(x)}; \quad (1.2)$$

в) если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - 1]\varphi(x)$  существует, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - 1]\varphi(x)}. \quad (1.3)$$

Действительно, положив в (1.1)  $\alpha(x) = t$ , получим:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [1 + \alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

Соотношение (1.2) следует из (1.1), так как

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [1 + \alpha(x)]^{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} \right]^{\alpha(x)\varphi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)\varphi(x)}.$$

Последняя операция является следствием непрерывности экспоненты, строгое обоснование мы опускаем.

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - 1] = 0$  и утверждение (1.3) следует из (1.2) при  $\alpha(x) = f(x) - 1$ .

Заметим, что во втором замечательном пределе раскрывается неопределенность типа  $1^\infty$ . Обратим внимание на то, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} 1^{\varphi(x)} = 1$ . Этот предел не содержит никакой неопределенности и в случае, если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$ , что следует из определения предела на языке последовательностей.

В следующей задаче рассмотрены случаи, когда  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)}$  неопределенности не содержит.

**1.5.2** Докажите справедливость следующих утверждений:

а) если функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  непрерывны в точке  $x_0$  и  $f(x) > 0$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)} = f(x_0)^{\varphi(x_0)}; \quad (1.4)$$

б) если либо  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = q < 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = +\infty$ , либо  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = q > 1$ , но  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = -\infty$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)} = 0; \quad (1.5)$$

в) если либо  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = q < 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = -\infty$ , либо  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = q > 1$ , но  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = +\infty$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)} = \infty. \quad (1.6)$$

Справедливость соотношения (1.4) следует из непрерывности степенно-показательной функции. Доказательство формул (1.5) и (1.6) опустим. (Интуитивно они очевидны.) Формулы (1.1)–(1.3) и (1.4)–(1.6) справедливы и при  $x \rightarrow \infty, -\infty, +\infty$ .

Предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)}$  может привести также к неопределенностям  $0^0$ ,  $\infty^0$ , которые мы рассмотрим позднее.

**1.5.3** Найдите следующие пределы:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{x^2 + 3x}{x + 1} \right)^{\frac{2}{x}}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2x + 1} \right)^x; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x^2 + 1} \right)^{x+1}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{1}{x + 1} \right)^{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

*Решение.* а) так как  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 + 3x}{x + 1} \right) = 0$ , то можем положить в соответствии с (1.2)  $\alpha(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$ ,  $\varphi(x) = \frac{2}{x}$ . Получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{x^2 + 3x}{x + 1} \right)^{\frac{2}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x + 1} \cdot \frac{2}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x+3)}{x+1}} = e^6;$$

б) полагаем в (1.2)  $\alpha(x) = \frac{1}{2x + 1}$ , что возможно, так как  $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$ . Получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2x + 1} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x + 1} \cdot x} = e^{\frac{1}{2}};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x^2 + 1} \right)^{x+1} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2 + 1}} = e^0 = 1;$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{1}{x + 1} \right)^{x^2 + 1} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x + 1}} = 0, \text{ так как}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1/x}{1 + 1/x} = -\infty.$$

Все четыре рассмотренных предела содержат неопределённость  $1^\infty$ . Раскрывая эту неопределённость, можно получить самые разнообразные ответы, включая 0, 1 и  $\infty$ .

**1.5.4** Найдите следующие пределы: а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x + 2}{x + 3} \right)^{x+4}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 5} \left( \frac{x - 3}{4x - 18} \right)^{\frac{2}{5-x}}$ .

*Решение.* а) так как  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{x + 3} = 1$ , то имеем право применить формулу (1.3), положив в ней  $f(x) = \frac{x + 2}{x + 3}$ ,  $\varphi(x) = x + 4$ . Получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x + 2}{x + 3} \right)^{x+4} = (1^\infty) = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x+3} - 1 \right) \cdot (x+4)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-(x+4)}{x+3}} = e^{-1} = 1/e;$$

б) поскольку  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 3}{4x - 18} = 1$ , то также применима формула (1.3). Находим

$$\lim_{x \rightarrow 5} \left( \frac{x - 3}{4x - 18} \right)^{\frac{2}{5-x}} = (1^\infty) = e^{\lim_{x \rightarrow 5} \left( \frac{x-3}{4x-18} - 1 \right) \cdot \frac{2}{5-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(15-3x) \cdot 2}{(5-x)(4x-18)}} = e^3.$$

**1.5.5** Найдите следующие пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2)^{x^3+1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x+3}{x+1} \right)^{x-2}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{4x+1}{8x+5} \right)^{x^3}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4x^2+1}{5x^2+2} \right)^{\frac{x^2+1}{x}}$ .

*Решение.* а) так как  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2) = 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 1) = 2$  и функции  $f(x) = x^2 + 2$  и  $\varphi(x) = x^3 + 1$  непрерывны в точке  $x = 1$ , то  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2)^{x^3+1} = 3^2 = 9$  (см. (1.4));

б) находим  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x+3}{x+1} \right) = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2) = -\infty$ , следовательно,  
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x+3}{x+1} \right)^{x-2} = 0$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+1}{8x+5} = \frac{1}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ , поэтому  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{4x+1}{8x+5} \right)^{x^3} = +\infty$  (см. (1.6));

г)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2+1}{5x^2+2} = \frac{4}{5}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$ , поэтому  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4x^2+1}{5x^2+2} \right)^{\frac{x^2+1}{x}} = 0$  (см. (1.5)).

### Задачи для самостоятельного решения

**1.5.6–1.5.8.** Найдите следующие пределы.

**1.5.6** а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x^2}{x^4+1} \right)^{2x^2+3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( 1 + \frac{x^2-4}{x+3} \right)^{\frac{1}{\sin(x-2)}}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 4x)^{\frac{1}{x}}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{x-1}{x^3}}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 3+0} \left( 1 + \frac{x-3}{x^2+1} \right)^{\frac{1}{\sin^2(x-3)}}$ .

**1.5.7** а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x^2+3}{5x^2-2x+1} \right)^{4x+3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \left( \operatorname{tg} \frac{x}{4} \right)^{\frac{2}{x-\pi}}$

(указание: использовать формулу  $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$ );

в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3x+1}{x+3} \right)^{\frac{4}{x-1}}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{8x-14}{3x-4} \right)^{\frac{24}{x^3-8}}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+4}{x^2+1} \right)^{2x}$ ;

е)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+6}{x^2+4} \right)^{x^4}$ ; ж)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-6} \right)^{x^3}$ .

**1.5.8** а)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+5}{5x+4} \right)^x$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{4x+1}{3x+2} \right)^{x^3}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4x+3}{2x+1} \right)^x$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{8x^2+3x+1}{16x^2+7} \right)^x$ .

Используя число  $e$ , вводят ряд новых функций:  $e^x$ , называемую экспонентой,  $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  — гиперболический косинус,  $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  — гипер-

болический синус,  $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$  — гиперболический тангенс,  $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$  — гиперболический котангенс. Функции  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{ch} x$ ,  $\operatorname{th} x$ ,  $\operatorname{cth} x$  называют гиперболическими. Находят применение и функции, обратные гиперболическим:  $\operatorname{arsh} x$ ,  $\operatorname{arch} x$ ,  $\operatorname{arth} x$ ,  $\operatorname{archth} x$ .

### 1.5.9 Докажите, что:

- а)  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ ;                      б)  $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$ ;  
 в)  $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$ ;                      г)  $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$ ;  
 д)  $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$ ;    е)  $\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}$ ;  
 ж)  $\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x-y}{2} \operatorname{ch} \frac{x+y}{2}$ ;    з)  $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}$ ;  
 и)  $\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}$ .

Как видим, гиперболические функции по свойствам очень напоминают тригонометрические функции. Гиперболические функции применяются во многих задачах, в частности при построении неевклидовых геометрий.

## 1.6 Следствия второго замечательного предела

Рекомендуется изучить п. 1.7.2 учебного пособия, в котором доказано, что:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ ;
- 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu$ .

Во всех этих пределах имеется неопределённость типа  $0/0$ .

### 1.6.1 Докажите, что если $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ , то:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\log_a[1 + \alpha(x)]}{\alpha(x)} = \log_a e; \quad (1.7)$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln[1 + \alpha(x)]}{\alpha(x)} = 1; \quad (1.8)$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{\alpha(x)} - 1}{\alpha(x)} = \ln a; \quad (1.9)$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{\alpha(x)} - 1}{\alpha(x)} = 1; \quad (1.10)$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[1 + \alpha(x)]^\mu - 1}{\alpha(x)} = \mu. \quad (1.11)$$

*Доказательство.* Сделаем замену в (1.7)  $\alpha(x) = t$ . Если  $x \rightarrow x_0$ , то  $t \rightarrow 0$ . Получаем  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\log_a[1 + \alpha(x)]}{\alpha(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + t)}{t} = \log_a e$  по первому следствию из второго замечательного предела. Аналогично доказываются соотношения (1.8)–(1.11).

Формулы (1.7)–(1.11) сохраняются и при  $x \rightarrow \pm\infty, \infty$ .

**1.6.2** Докажите, что если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$  и существует  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - 1}{\varphi(x)}$ , то:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\log_a f(x)}{\varphi(x)} = \log_a e \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - 1}{\varphi(x)}; \quad (1.12)$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(x)]^\mu - 1}{\varphi(x)} = \mu \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - 1}{\varphi(x)}. \quad (1.13)$$

*Доказательство.* Так как  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - 1] = 0$ .

Можем записать  $f(x) = 1 + \alpha(x)$ . Теперь

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\log_a f(x)}{\varphi(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\log_a[1 + \alpha(x)]}{\alpha(x)} \cdot \frac{\alpha(x)}{\varphi(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\log_a[1 + \alpha(x)]}{\alpha(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\varphi(x)} = \log_a e \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - 1}{\varphi(x)}. \end{aligned}$$

Использовали формулу (1.7) и теорему о пределе произведения. Утверждение (1.13) доказывается аналогично.

Если окажется, что предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - 1}{\varphi(x)}$  не существует, то пределы (1.12) и (1.13) также не существуют.

**1.6.3** Докажите, что если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$  и существует  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\varphi(x)}$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{\alpha(x)} - 1}{\varphi(x)} = \ln a \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\varphi(x)}; \quad (1.14)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{\alpha(x)} - 1}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\varphi(x)}. \quad (1.15)$$

*Доказательство.*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{\alpha(x)} - 1}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{\alpha(x)} - 1}{\alpha(x)} \cdot \frac{\alpha(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{\alpha(x)} - 1}{\alpha(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\varphi(x)} = \ln a \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\varphi(x)}.$$

При этом мы использовали формулу (1.9) и теорему о пределе произведения. Соотношение (1.14) доказано. Равенство (1.15) следует из (1.14) при  $a = e$ .

В задачах 1.6.2 и 1.6.3 случаи  $x \rightarrow \infty, -\infty, +\infty$  не исключаются. Заметим, что если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A, A \neq 0$ , то в пределах задач 1.6.2 и 1.6.3 неопределённости нет и соответствующие пределы будут равняться нулю. Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$  не существует,

но функция  $\psi(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$  ограничена в окрестности  $x_0$ , то соответствующие пре-

дела также будут равны нулю по теореме о произведении бесконечно малой на ограниченную функцию.

Как видим, пределы (1.12), (1.13), (1.14) и (1.15) содержат неопределённость типа  $0/0$ , только если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ .

При решении примеров с использованием следствий из второго замечательного предела можно либо использовать задачи 1.6.1–1.6.3, либо проделывать преобразования в каждом отдельном случае, подобно тому, как это сделано в задачах 1.6.1–1.6.3 в общем случае.

**1.6.4** Найдите следующие пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + \operatorname{tg}^3 x)}{\operatorname{tg}^3 x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin^2 x} - 1}{\sin^2 x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \sin^3 x} - 1}{\sin^3 x}.$$

*Решение.* а) все предложенные пределы являются частным случаем пределов, рассмотренных в задаче 1.6.1. Можно положить  $\alpha(x) = \operatorname{tg}^3 x$ , так как  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg}^3 x = 0$ ,

$$\text{поэтому } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + \operatorname{tg}^3 x)}{\operatorname{tg}^3 x} = \log_a e;$$

б) в этом случае  $\alpha(x) = \sin^2 x$ , так как  $\sin^2 x \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ . Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin^2 x} - 1}{\sin^2 x} = \ln 3 \text{ (см. (1.9));}$$

$$\text{в) на основании предела (1.11) получаем } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \sin^3 x} - 1}{\sin^3 x} = \frac{1}{3}$$

(здесь  $\alpha(x) = \sin^3 x$ , и  $\sin^3 x \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ ).

**1.6.5** Найдите следующие пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{1 + 5x}{1 + 4x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2 + 4x - 4)}{x - 1}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left( 1 + \operatorname{tg} \frac{5}{x} \right).$$

*Решение.* а) положим  $f(x) = \frac{1 + 5x}{1 + 4x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ ,  $\varphi(x) = x$ . На основании формулы (1.12) получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{1 + 5x}{1 + 4x} = \log_e e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 + 5x}{1 + 4x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(1 + 4x)} = 1;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2 + 4x - 4)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 4 - 1}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 5)}{x - 1} = 6, \end{aligned}$$

в этом примере можно положить  $f(x) = x^2 + 4x - 4$ , так как  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 4x - 4) = 1$ , и применить формулу (1.12);

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left( 1 + \operatorname{tg} \frac{5}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( 1 + \operatorname{tg} \frac{5}{x} \right)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{5}{x}}{1/x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5t}{t} = 5,$$

где  $t = 1/x$ ,  $\alpha(x) = \operatorname{tg} \frac{5}{x}$ ,  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ ,  $\varphi(x) = 1/x$ .



**1.6.6** Найдите следующие пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - 27}{x^2 - 9}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2-1} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 x} - 1}{\sqrt{4+x^2} - 2}$ .

*Решение.* а)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - 27}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - 3^3}{x^2 - 9} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^3(3^{x-3} - 1)}{(x-3)(x+3)} = 3^3 \ln 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+3)} = \frac{27}{6} \ln 3 = \frac{9}{2} \ln 3;$

б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2-1} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x} + 1)}{x-1} = 4.$

Здесь  $\alpha(x) = x^2 - 1$ ,  $\varphi(x) = \sqrt{x} - 1$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 x} - 1}{\sqrt{4+x^2} - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{4+x^2} - 2} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+x^2} + 2) \sin^2 x}{4 + x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} (\sqrt{4+x^2} + 2) = 4.$

**1.6.7** Найдите следующие пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^\mu x - 1}{x^2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x}$ .

*Решение.* а) обозначим  $f(x) = \cos x$ . Так как  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ , то можем применить формулу (1.13). Получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^\mu x - 1}{x^2} = \mu \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \mu \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = -\frac{\mu}{2};$$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$   
 (так как  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu$ ).

**1.6.8** Найдите следующие пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{\ln(x^2 - 5x + 7)}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$ .

*Решение.*

а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{\ln(x^2 - 5x + 7)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^2(e^{x-2} - 1)}{\ln[1 + (x^2 - 5x + 6)]} = e^2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(x-3)} = -e^2;$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - 1}{\cos bx - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{ax}{2}}{-2 \sin^2 \frac{bx}{2}} = \frac{a^2}{b^2}.$

**Задачи для самостоятельного решения**

**1.6.9–1.6.13.** Найдите следующие пределы.

**1.6.9** а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1+4x)}{x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{5x} - 1}{x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+3x} - 1}{x}$ .

**1.6.10** а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2 \sin^2 x)}{\sin^2 x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{2 \operatorname{tg}^3 x} - 1}{\operatorname{tg}^3 x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x^4} - 1}{x^4}$ .

$$1.6.11 \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+5}{x-3} \ln \frac{4x-1}{2x+5}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} (4x^3 + 1) \ln \frac{x^4 - 2x + 2}{x^4 + x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{5x+1}{x+1}.$$

$$1.6.12 \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin 4x} - 1}{\operatorname{tg} 5x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - 4}{\sqrt{2x} - 2}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{5x-5} - 1}{\sqrt{5x-1} - 2}.$$

$$1.6.13 \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^x}{e^{\sin 2x} - 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 3x + 3)}{e^x - e^2}.$$

## 1.7 Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Рекомендуется изучить п. 1.8 учебного пособия.

**1.7.1** Найдите порядок малости и главную часть бесконечно малой  $\alpha(x) = \sin 2x - 2 \sin x$  относительно  $\beta(x) = x$ .

*Решение.* Согласно определению порядка малости нужно найти такое значение  $r$ , чтобы предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x^r}$  был конечным и отличным от нуля. Преобразуем числитель:

$$\sin 2x - 2 \sin x = 2 \sin x \cos x - 2 \sin x = 2 \sin x (\cos x - 1) = -4 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \sin x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \sin x}{x} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2^2} \cdot 4 \cdot x^{r-3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^{r-3}}.$$

Видим, что предел будет конечным только при  $r = 3$ , так как  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2/4} = 1. \text{ При } r = 3 \text{ имеем } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x^3} = -1.$$

*Вывод:* порядок малости величины  $\alpha(x) = \sin 2x - 2 \sin x$  относительно  $\beta(x) = x$  равен трем, а её главная часть равна  $\gamma(x) = -x^3$  при  $x \rightarrow 0$ .

**1.7.2** Докажите, что бесконечно малая  $\alpha(x) = 3 \sin^4 x - x^5$  имеет порядок малости относительно  $\beta(x) = x$ , равный 4, а её главная часть равна  $\gamma(x) = 3x^4$ .

*Решение.* Имеем  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin^4 x - x^5}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin^4 x}{x^4} - \frac{x}{3} \right) = 1$ . Отсюда и следует справедливость утверждения задачи.

При  $x \rightarrow \infty, -\infty, +\infty$  в качестве эталонной бесконечно малой обычно берут  $\beta(x) = \frac{1}{x}$ .

**1.7.3** Докажите, что функция  $\alpha(x) = \sqrt{x^4 + 1} - x^2$  является бесконечно малой при  $x \rightarrow \infty$ , найдите ее порядок малости относительно  $\beta(x) = 1/x$  и главную часть.

*Решение.* Находим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + 1} - x^2) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^4 + 1} - x^2)(\sqrt{x^4 + 1} + x^2)}{\sqrt{x^4 + 1} + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^4 + 1} + x^2} = 0,$$

то есть  $\alpha(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow \infty$ . Для определения ее порядка малости относительно  $\beta(x)$  нужно найти значение  $r$ , при котором  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1} - x^2}{1/x^r}$  конечен и отличен от нуля. После несложных преобразований, только что проделанных, находим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1} - x^2}{1/x^r} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^r}{\sqrt{x^4 + 1} + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^r}{x^2 \left( \sqrt{1 + 1/x^4} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{r-2}}{\sqrt{1 + 1/x^4} + 1}.$$

Видим, что предел конечен и не равен нулю только при  $r = 2$ , т. е. порядок малости равен 2. При  $r = 2$  этот предел равен  $C = 1/2$ . Поэтому главная часть  $\gamma(x) = \frac{1}{2x^2}$ .

Понятие эквивалентности бесконечно малых находит широкое применение как в приближенных вычислениях, так и в теоретических вопросах. Использование этого понятия значительно упрощает отыскание некоторых пределов.

Рекомендуем особенно хорошо изучить п. 1.8.3 учебного пособия.

При отыскании пределов, содержащих неопределённость  $0/0$ , используется свойство эквивалентных бесконечно малых

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)},$$

где  $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ ,  $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ , т. е. предел отношения бесконечно малых равен пределу отношения эквивалентных им бесконечно малых.

**1.7.4** Пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентными, найдите следующие пределы:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\ln(1 + 2x)}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{4(x-1)} - 1}{\ln[1 + \operatorname{tg} 2(x-1)]}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arcsin 3(x-2)}{\operatorname{arctg} 4(x^2 - 4)}; \\ \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x + \arcsin^2 x + x^3}{2x}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos \frac{x}{4}}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - x^2 + x^3}{\operatorname{tg} 2x + 2 \sin^2 x + 5x^4}; \\ \text{ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\sqrt[4]{1 + x^2} - 1}; \quad \text{з) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{\sin 4x}. \end{aligned}$$

*Решение.* а) по таблице эквивалентных бесконечно малых (п. 1.8.3 учебного пособия)  $\sin 8x \sim 8x$ ,  $\ln(1 + 2x) \sim 2x$ , поэтому  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\ln(1 + 2x)} = 4$ ;

б) так как  $e^{4(x-1)} - 1 \sim 4(x-1)$  при  $x \rightarrow 1$ ,  
 $\ln(1 + \operatorname{tg} 2(x-1)) \sim \operatorname{tg} 2(x-1) \sim 2(x-1)$ , то

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{4(x-1)} - 1}{\ln(1 + \operatorname{tg} 2(x-1))} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(x-1)}{2(x-1)} = 2;$$

в) поскольку  $\arcsin 3(x-2) \sim 3(x-2)$ ,  $\operatorname{arctg} 4(x^2 - 4) \sim 4(x^2 - 4)$  при  $x \rightarrow 2$ , то

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arcsin 3(x-2)}{\operatorname{arctg} 4(x^2 - 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)}{4(x^2 - 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)}{4(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{4(x+2)} = \frac{3}{16};$$

г) так как сумма бесконечно малых функций эквивалентна слагаемому, имеющему наименьший порядок малости, то можем записать:  $\operatorname{tg} 3x + \arcsin^2 x + x^3 \sim \operatorname{tg} 3x \sim 3x$ . Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x + \arcsin^2 x + x^3}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2};$$

д) так как  $(1 - \cos 2x) \sim 2x^2$ ,  $\left(1 - \cos \frac{x}{4}\right) \sim \frac{1}{32}x^2$ , то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos \frac{x}{4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{(1/32)x^2} = 64;$$

е) имеем  $(3 \sin x - x^2 + x^3) \sim 3 \sin x \sim 3x$ ,  $(\operatorname{tg} 2x + 2 \sin^2 x + 5x^4) \sim \operatorname{tg} 2x \sim 2x$ , поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - x^2 + x^3}{\operatorname{tg} 2x + 2 \sin^2 x + 5x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2};$$

ж) можем записать  $\ln \cos x = \ln[1 + (\cos x - 1)] \sim (\cos x - 1) \sim -\frac{1}{2}x^2$ ,  $\sqrt[4]{1+x^2} - 1 \sim \frac{1}{4}x^2$  при  $x \rightarrow 0$ , поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\sqrt[4]{1+x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-1/2)x^2}{(1/4)x^2} = -2;$$

з) так как  $\sqrt{1+x+x^2} - 1 \sim \frac{1}{2}(x+x^2) \sim \frac{1}{2}x$ ,  $\sin 4x \sim 4x$  при  $x \rightarrow 0$ , то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1/2)x}{4x} = \frac{1}{8}.$$

Применяя метод замены бесконечно малых им эквивалентными, можно в некоторых случаях упростить процесс выделения главной части бесконечно малых.

**1.7.5** Выделите главную часть вида  $\gamma(x) = C(x - x_0)^r$  следующих бесконечно малых при  $x \rightarrow x_0$ :

а)  $\alpha_1(x) = \frac{\operatorname{tg}^2(x+2)}{\arcsin(\sqrt{2-x}-2)}$ ,  $x_0 = -2$ ;

б)  $\alpha_1(x) = \frac{9(x+1)}{x^2-9} + \frac{x}{x+3}$ ,  $x_0 = -3$ .

*Решение.* а) подберём такие значения  $C$  и  $r$ , чтобы был равен единице

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\alpha_1(x)}{C(x+2)^r}. \text{ Так как}$$

$$\operatorname{tg}^2(x+2) \sim (x+2)^2, \quad \arcsin(\sqrt{2-x}-2) \sim 2 \left( \sqrt{1 - \frac{x+2}{4}} - 1 \right) \sim -\frac{x+2}{4}, \text{ то}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg}^2(x+2)}{[\arcsin(\sqrt{2-x}-2)] C(x+2)^r} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-4(x+2)^2}{(x+2) \cdot C(x+2)^r}.$$

Видим, что  $r = 1$ ,  $C = -4$ , т. е.  $\gamma(x) = -4(x + 2)$ ;

б) убедимся, что функция  $\alpha_2(x) = \frac{9(x+1)}{x^2-9} + \frac{x}{x+3}$  является бесконечно малой при  $x \rightarrow -3$ . Можем записать

$$\alpha_2(x) = \frac{9(x+1) + x(x-3)}{x^2-9} = \frac{x^2+6x+9}{x^2-9} = \frac{(x+3)^2}{(x+3)(x-3)} = \frac{x+3}{x-3}$$

при  $x \neq -3$ . Отсюда следует, что  $\lim_{x \rightarrow -3} \alpha_2(x) = 0$ . Находим, что

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{(x-3)C(x+3)^r} = 1 \text{ только при } r = 1, C = -\frac{1}{6}, \text{ т. е. } \gamma(x) = -\frac{1}{6}(x+3).$$

**1.7.6** Выделите главную часть вида  $\gamma(x) = \frac{C}{x^k}$  следующих бесконечно малых функций при  $x \rightarrow \infty$  (или  $\pm\infty$ ):

$$\text{а) } \alpha_1(x) = \frac{12x-1}{\sqrt{9x^6+1}-x}; \quad \text{б) } \alpha_2(x) = \frac{e^{2/x}-1}{x^5+1}.$$

*Решение.* а) требуется найти такие  $C$  и  $r$ , чтобы  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^r \alpha_1(x)}{C}$  был равен 1. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(12x-1)x^r}{C(\sqrt{9x^6+1}-x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(12x-1)x^r}{C[|x^3|\sqrt{9+(1/x^6)}-x]} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x[12-(1/x)]x^r}{C[|x^3|\sqrt{9+(1/x^6)}-x]} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(12-(1/x))x^{r-2}}{\pm C[\sqrt{9+(1/x^6)}-(1/x^2)]}. \end{aligned}$$

При  $x \rightarrow +\infty$  нужно взять знак «+», а при  $x \rightarrow -\infty$  — знак «-». Видим, что предел конечен только при  $r = 2$ , при этом он равен  $\pm \frac{12}{3C}$ . Так как должно быть  $\pm \frac{12}{3C} = 1$ , то  $C = \pm 4$ . Итак, главная часть равна  $\gamma(x) = \pm \frac{4}{x^2}$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ ;

б) находим  $r$  и  $C$  из условия, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^r \cdot \alpha_2(x)}{C} = 1$ , или

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^r(e^{2/x}-1)}{C \cdot (x^5+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^r \cdot 2/x}{C \cdot (1+1/x^5)x^5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{r-6}}{C \cdot (1+1/x^5)} = \frac{2}{C} \text{ при } r = 6.$$

Так как по условию  $\frac{2}{C} = 1$ , то  $C = 2$ . Функция  $\gamma(x) = \frac{2}{x^6}$  является главной частью бесконечно малой  $\alpha_2(x)$ .

Мы в основном занимались бесконечно малыми величинами. По теореме о связи между бесконечно большими и бесконечно малыми величинами изучение бесконечно большой величины  $y(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  можно свести к изучению бесконечно малой  $\alpha(x) = \frac{1}{y(x)}$  при  $x \rightarrow x_0$ .

**1.7.7** Выделите главную часть вида  $\gamma(x) = \frac{C}{(x-2)^r}$  бесконечно большой величины  $y = \frac{4}{(\sqrt{5-2x}-1)\ln(3-x)}$  при  $x \rightarrow 2$ .

*Решение.* Согласно сделанному замечанию мы можем свести задачу к бесконечно малым либо исходить из определения главной части бесконечно больших. По этому определению мы должны найти такие константы  $C$  и  $r$ , чтобы предел  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{y}{\gamma(x)}$  был равен единице. По таблице эквивалентных бесконечно малых находим

$$\sqrt{5-2x} - 1 = \sqrt{1-2(x-2)} - 1 \sim -(x-2), \quad \ln(3-x) = \ln[1-(x-2)] \sim -(x-2).$$

Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{y}{\gamma(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{[(\sqrt{5-2x} - 1) \ln(3-x)] / (C/(x-2)^r)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x-2)^r}{(x-2)^2 C}.$$

Отсюда следует, что этот предел равен единице только при  $r = 2$ ,  $C = 4$ . Следовательно, функция  $\gamma(x) = \frac{4}{(x-2)^2}$  является главной частью бесконечно большой  $y(x)$  при  $x \rightarrow 2$ .

При  $x \rightarrow \infty, -\infty, +\infty$  в качестве эталонной для бесконечно малых, как мы уже отмечали, берут величину  $\beta(x) = 1/x$ , а для бесконечно больших — величину  $y(x) = x$ . Все остальные действия ничем не отличаются от действий в рассмотренных примерах.

### Задачи для самостоятельного решения

**1.7.8** Докажите, что функции:

а)  $f(x) = \frac{2x-6}{x^2+1}$  при  $x \rightarrow 3$ ;

б)  $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$  при  $x \rightarrow +\infty$ ;

в)  $f(x) = (x-2) \cos^2 \frac{1}{x-2}$  при  $x \rightarrow 2$

являются бесконечно малыми.

**1.7.9** Докажите, что функции:

а)  $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{\sin^4(x-2)} + \frac{1}{x^2-4}$  при  $x \rightarrow 2+0$ ;

б)  $f(x) = \frac{x-1}{\ln(x^2-2x+2)}$  при  $x \rightarrow 1$

являются бесконечно большими.

**1.7.10** Докажите, что функция  $\alpha(x) = \ln(x^2 - 8x + 17)$  при  $x \rightarrow 4$  имеет более высокий порядок малости по сравнению с функцией  $\beta_1(x) = \operatorname{tg}(x-4)$ , более низкий порядок малости по сравнению с функцией  $\beta_2(x) = \sin^3(x-4)$  и что ее порядок малости совпадает с порядком малости функции  $\beta_3(x) = \sqrt[4]{8x-x^2-15} - 1$ .

**1.7.11** Докажите, что бесконечно большая функция  $\varphi(x) = x^3 + 4x^2 - 1$  при  $x \rightarrow \infty$  имеет более высокий порядок роста по сравнению с функцией  $f_1(x) = x^2 + 2$ , более низкий порядок роста по сравнению с функцией  $f_2(x) = 2x^5 + 3x^2 + 1$  и тот же порядок роста, что и функция  $f_3(x) = 5x^3 + 3$ .

**1.7.12** Определите порядок малости  $r$  при  $x \rightarrow x_0$  относительно бесконечно малой  $\beta(x) = x - x_0$  следующих бесконечно малых функций:

а)  $\alpha_1(x) = (x^3 - 1) \sin^2(x^2 - 1), \quad x_0 = 1;$

б)  $\alpha_2(x) = \frac{1 - \cos 3(x - 2)}{\sqrt{3 - x} - 1}, \quad x_0 = 2;$

в)  $\alpha_3(x) = \sqrt[4]{x - 3} \operatorname{tg}(x^2 - 9), \quad x_0 = 3.$

**1.7.13** Определите порядок малости относительно бесконечно малой  $\beta(x) = \frac{1}{x}$  при  $x \rightarrow \infty$  следующих бесконечно малых функций:

а)  $\alpha_1(x) = \sin \frac{x+1}{x^3+1} \cdot \ln \frac{x^2+4}{x^2+1};$

б)  $\alpha_2(x) = \frac{\sqrt[5]{x}}{x^2 + \sqrt{x^2+1}};$

в)  $\alpha_3(x) = (\sqrt{x^4+4} - x^2) \ln \frac{x^2+3}{x^2+2}.$

**1.7.14** Пользуясь методом замены бесконечно малых функций эквивалентными, вычислить следующие пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - \cos 4x)}{\ln^2(1 + \sin 3x)};$  б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1 + \sin 3(x-1)} - 1}{e^{\sin 5(x-1)} - 1};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\operatorname{arctg} 2(x-3) + (x-3)^4}{\sqrt{4-x} - 1};$  г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x - 2x^2 + x^3)}{\ln(1 - x + 2x^2 - 8x^3)}.$

**1.7.15** Выделите главную часть вида  $C(x-x_0)^r$  следующих бесконечно малых при  $x \rightarrow x_0$ :

а)  $\alpha_1(x) = \sqrt[4]{x-3} \cdot \ln \left( 1 + \sqrt{\frac{x-3}{x+6}} \right), \quad x_0 = 3;$

б)  $\alpha_2(x) = \frac{(\sqrt{x+2} - 2)^2}{\ln(x-1)}, \quad x_0 = 2;$

в)  $\alpha_3(x) = \frac{e^{x^5} - 1}{\sqrt{1+x^2} - 1}, \quad x_0 = 0.$

**1.7.16** Выделите главную часть вида  $\gamma(x) = \frac{C}{x^r}$  следующих бесконечно малых при  $x \rightarrow \infty$ :

а)  $\alpha_1(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{x^4+1} \cdot \ln \frac{x+5}{x+1};$

б)  $\alpha_2(x) = (\sqrt{x^4+4} - x^2) \sin \frac{3x+1}{x^6+1};$

в)  $\alpha_3(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^5+1}} \sin \frac{5}{x}.$

**1.7.17** Выделите главную часть вида  $\gamma(x) = \frac{C}{(x-x_0)^r}$  следующих бесконечно больших при  $x \rightarrow x_0$ :

а)  $\varphi_1(x) = \frac{1}{(\sqrt{8+x-3})(x^3-1)}, \quad x_0 = 1;$

б)  $\varphi_2(x) = \frac{3^x}{[\ln(x-1)]^4}, \quad x_0 = 2;$

$$\text{в) } \varphi_3(x) = \frac{\operatorname{tg}(x^2 - 16)}{(x - 4)^2 + \sqrt[4]{(x - 4)^5}}, \quad x_0 = 4.$$

**1.7.18** Выделите главную часть вида  $\gamma(x) = Cx^r$  следующих бесконечно больших при  $x \rightarrow \infty$ :

$$\text{а) } \varphi_1(x) = 1 + x^2 + 3x\sqrt[4]{x^5 + 1}; \quad \text{б) } \varphi_2(x) = \frac{x^4 + 2x + 1}{5x^2 + 2}.$$

**1.7.19** Докажите, что функция: а)  $f(x, y) = \frac{x^6 + y^6}{x^2 + y^2}$  является бесконечно малой при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ;

$$\text{б) } f(t) = \begin{bmatrix} \frac{t}{t^2 + 1} \\ \frac{t^3}{t - 2} \end{bmatrix} \text{ является бесконечно малой при } t \rightarrow 0$$

и бесконечно большой при  $t \rightarrow 2$ .

## 1.8 Непрерывность функции. Классификация разрывов функции

Рекомендуется изучить п. 1.6 учебного пособия.

Задача характеристики точек разрыва сводится к отысканию односторонних пределов или доказательству, что хотя бы один из них не существует.

**1.8.1** Охарактеризуйте точку  $x = 2$  для функции  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}$ .

*Решение.* Данная функция имеет область определения  $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ . Точка  $x_0 = 2$  является предельной для области определения, в самой точке  $x_0 = 2$  функция не определена.

Вычисляем односторонние пределы:

$$f(2 + 0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = 4,$$

поскольку при  $x > 2$  величина  $|x - 2| = x - 2$ ;

$$f(2 - 0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{(x - 2)(x + 2)}{-(x - 2)} = -4,$$

так как если  $x < 2$ , то  $|x - 2| = -(x - 2)$ .

Как видим, существуют конечные правый и левый пределы, не равные между собой. Поэтому точка  $x_0 = 2$  является точкой разрыва первого рода.

**1.8.2** Охарактеризуйте точку  $x_0 = 0$  функции  $f(x) = \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$ .

*Решение.* Точка  $x = 0$  является предельной для области определения  $f(x)$ . Находим

$$f(0 + 0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sqrt{2 \sin^2 x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sqrt{2} |\sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sqrt{2} \sin x}{x} = \sqrt{2}.$$



Заметим, что  $|\sin x| = \sin x$ , если  $0 < x < (\pi/2)$ ;

$$f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{-\sqrt{2} \sin x}{x} = -\sqrt{2},$$

так как  $|\sin x| = -\sin x$ , если  $-\pi/2 < x < 0$ . Поскольку  $f(0+0)$  и  $f(0-0)$  существуют и конечны, но  $f(0+0) \neq f(0-0)$ , то точка  $x_0 = 0$  является точкой разрыва первого рода.

**1.8.3** Охарактеризуйте точку  $x_0 = 1$  для функции  $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ .

*Решение.*

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} 2^t = 0$$

(сделали замену  $\frac{1}{x-1} = t$ , когда  $x \rightarrow 1-0$ ,  $t \rightarrow -\infty$ );

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 2^t = +\infty$$

(та же замена, но при  $x \rightarrow 1+0$ ,  $t \rightarrow +\infty$ ).

Так как один из односторонних пределов обращается в  $\infty$ , то точка  $x_0 = 0$  — точка разрыва второго рода.

Если в точке  $x_0$  функция определена, то вводят понятие односторонней непрерывности. Если окажется  $f(x_0-0) = f(x_0)$ , то функцию называют непрерывной в точке  $x_0$  слева, если же  $f(x_0+0) = f(x_0)$ , то функцию называют непрерывной в точке  $x_0$  справа. Например, функция  $\varphi(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x-1}}, & \text{если } x \neq 1, \\ 0, & \text{если } x = 1 \end{cases}$  непрерывна в точке  $x_0 = 1$  слева, но разрывна справа.

**1.8.4** Охарактеризуйте точку  $x_0 = 1$  для функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x^2-4}, & \text{если } x \leq 1, \\ \frac{x+4}{x^2-16}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

*Решение.* Находим односторонние пределы при  $x \rightarrow 1 \pm 0$ :

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{3}{-3} = -1;$$

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4}{x^2-16} = \frac{5}{-15} = -\frac{1}{3}.$$

Так как левый и правый пределы существуют, конечны, но неравны, то точка  $x_0 = 1$  является точкой разрыва первого рода.

**1.8.5** Найдите все точки разрыва и охарактеризуйте их для следующих функций:

$$f_1(x) = \frac{x^2-4}{x\sqrt{(x-2)^2}} + \frac{e^x-e^4}{x-4}; \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x}{x^2-16}, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

*Решение.* Заметим, что частное от деления двух непрерывных функций может иметь разрыв только в тех точках, в которых знаменатель обращается в нуль. Такими точками для функции  $f_1(x)$  являются  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$  и  $x_3 = 4$ . Исследуем эти точки.

$$f_1(0 \pm 0) = \lim_{x \rightarrow 0 \pm 0} \left( \frac{x^2 - 4}{x|x - 2|} + \frac{e^x - e^4}{x - 4} \right) = \mp \infty,$$

следовательно, в точке  $x_1 = 0$  разрыв второго рода;

$$f_1(2 + 0) = \lim_{x \rightarrow 2 + 0} \left( \frac{(x - 2)(x + 2)}{x(x - 2)} + \frac{e^x - e^4}{x - 4} \right) = 2 + \frac{e^2 - e^4}{-2},$$

так как  $|x - 2| = (x - 2)$  при  $x > 2$ ;

$$f_1(2 - 0) = \lim_{x \rightarrow 2 - 0} \left( -\frac{(x - 2)(x + 2)}{x(x - 2)} + \frac{e^x - e^4}{x - 4} \right) = -2 + \frac{e^2 - e^4}{-2},$$

так как  $|x - 2| = -(x - 2)$  при  $x < 2$ . Поскольку  $f_1(2 + 0) \neq f_1(2 - 0)$ , то в точке  $x_2 = 2$  разрыв первого рода;

$$f_1(4 \pm 0) = \lim_{x \rightarrow 4 \pm 0} \left( \frac{(x^2 - 4)}{x|x - 2|} + \frac{e^4(e^{x-4} - 1)}{x - 4} \right) = \frac{3}{2} + e^4,$$

следовательно, в точке  $x_3 = 4$  устранимый разрыв.

Для функции  $f_2(x)$  только в точках  $x_1 = -4$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 1$ ,  $x_4 = 3$  возможен разрыв. Исследуем эти точки.

$$f_2(-4 \pm 0) = \lim_{x \rightarrow -4 \pm 0} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{x^2 - 16} \right) = \infty,$$

следовательно, в точке  $x_1 = -4$  разрыв второго рода;

$$\begin{aligned} f_2(0 - 0) &= \lim_{x \rightarrow 0 - 0} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{x^2 - 16} \right) = 0, \\ f_2(0 + 0) &= \lim_{x \rightarrow 0 + 0} \frac{\sin(x - 3)}{x^2 - 4x + 3} = -\frac{\sin 3}{3}, \end{aligned}$$

т. е. в точке  $x_2 = 0$  разрыв первого рода;

$$f_2(1 \pm 0) = \lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{\sin(x - 3)}{(x - 1)(x - 3)} = \infty,$$

в точке  $x_3 = 1$  также разрыв второго рода;

$$f_2(3 \pm 0) = \lim_{x \rightarrow 3 \pm 0} \frac{\sin(x - 3)}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{1}{2},$$

следовательно, в точке  $x_4 = 3$  имеем устранимый разрыв.

**Задачи для самостоятельного решения**

**1.8.6** Исходя из определения, докажите непрерывность следующих функций:

а)  $f(x) = x^2 + 3x + 1$  при любом  $x$ ; б)  $f(x) = x^3$  при любом  $x$ .

**1.8.7** Используя теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного, докажите непрерывность при любом  $x$  следующих функций:

а)  $f_1(x) = \frac{\sin x + \operatorname{arctg} 2x}{x^2 + 1}$ ; б)  $f_2(x) = \frac{\cos x + x^2}{2^x + 4}$ .

**1.8.8** Охарактеризуйте указанную точку  $x_0$  для функций:

а)  $f(x) = \frac{\arcsin(x-1)}{|x^2-1|}$ ,  $x_0 = 1$ ; б)  $f(x) = \frac{\arcsin(x-1)}{x^2-1}$ ,  $x_0 = 1$ ;

в)  $f(x) = \frac{\arcsin\left(\frac{x-1}{3}\right)}{x^2-1}$ ,  $x_0 = -1$ .

**1.8.9** Охарактеризуйте точку  $x_0 = 0$  для следующих функций:

$$f_1(x) = \frac{\ln(1+3x)}{x}; \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+3x)}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 3, & \text{если } x = 0; \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+3x)}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

**1.8.10** Найдите точки разрыва данных функций и охарактеризуйте их:

$$f_1(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2-4} + \frac{\sin(4-x^2)}{x^2-2x}; \quad f_2(x) = \frac{\sin(x+2)}{|x^2-4|} + \frac{\operatorname{tg} x}{5x}.$$

**1.8.11** Найдите точки разрыва данных функций и охарактеризуйте их:

$$\text{а) } f_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2-4}, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{e^x - e}{x^2-1}, & \text{при } x > 0; \end{cases} \quad \text{б) } f_2(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \ln(x+5)}{x^2-16}, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{x}{x^2-9}, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

**1.8.12** Можно ли подобрать число  $A$  таким, чтобы функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ A, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

была непрерывной в точке  $x = 0$ ?

## 1.9 Техника дифференцирования функций одного аргумента

Необходимо изучить пп. 2.1, 2.2, 2.3 учебного пособия.

Процесс отыскания производной матрицы называют дифференцированием. Как следует из теории, элементами производной матрицы являются либо производные  $f'_x = \frac{df}{dx}$  скалярной функции одного скалярного аргумента, либо частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  скалярной функции векторного аргумента. Надо научиться находить эти производные.

Укажем правила отыскания производных. Особенно часто применяется правило дифференцирования композиции отображений (сложной функции): если функция  $u(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , а функция  $f(u)$  дифференцируема в соответствующей точке  $y_0 = u(x_0)$ , то сложная функция  $f[u(x)]$  дифференцируема в точке  $x_0$  и при этом

$$\{f[u(x)]\}' = f'_u(u) \cdot u'_x(x). \quad (\text{а})$$

Функция  $u(x)$  сама может быть сложной функцией от  $x$ :  $u = u[t(x)]$ , и тогда  $\{f[u(t(x))]\}' = f'_u(u) \cdot u'_t(t) \cdot t'_x(x)$ . Функция  $t(x)$  также может быть сложной функцией от  $x$ :  $t[v(x)]$ , и тогда  $f'_x(x) = f'_u(u) \cdot u'_t(t) \cdot t'_v(v) \cdot v'_x(x)$  и т. д.

Напомним также правила дифференцирования суммы, произведения и частного. Если функции  $u(x)$  и  $v(x)$  дифференцируемы, то дифференцируемы и функции  $u(x) + v(x)$ ,  $u(x) \cdot v(x)$ ,  $\frac{u(x)}{v(x)}$  (в последнем случае  $v(x) \neq 0$ ) и справедливы формулы:

$$[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x); \quad (\text{б})$$

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x); \quad (\text{в})$$

$$\left[ \frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}. \quad (\text{г})$$

Произведение и частное определены только для скалярных функций. Поэтому формулы (в) и (г) имеют смысл только для такого вида функций. Так как  $C' = 0$ , где  $C$  — константа, то из формулы (в) следует правило

$$[C \cdot v(x)]' = C \cdot v'(x), \quad (\text{д})$$

т. е. константу можно выносить за знак производной.

Пусть  $u = u(x)$  — произвольная дифференцируемая функция. Запишем таблицу производных элементарных функций, которую следует запомнить:

- 1)  $[u^\alpha(x)]' = \alpha u(x)^{\alpha-1} \cdot u'(x);$
- 2)  $[a^{u(x)}]' = a^{u(x)} \ln a \cdot u'(x), [e^{u(x)}]' = e^{u(x)} \cdot u'(x);$
- 3)  $[\log_a |u(x)|]' = \frac{u'(x)}{u(x) \ln a} = \frac{\log_a e}{u(x)} \cdot u'(x), [\ln |u(x)|]' = \frac{u'(x)}{u(x)};$
- 4)  $[\sin u(x)]' = u'(x) \cdot \cos u(x);$
- 5)  $[\cos u(x)]' = -u'(x) \cdot \sin u(x);$
- 6)  $[\operatorname{tg} u(x)]' = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)};$

$$\begin{aligned}
7) \quad [\operatorname{ctg} u(x)]' &= -\frac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}; & 12) \quad [\arcsin u(x)]' &= \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}; \\
8) \quad [\operatorname{sh} u(x)]' &= u'(x) \cdot \operatorname{ch} u(x); & 13) \quad [\arccos u(x)]' &= -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}; \\
9) \quad [\operatorname{ch} u(x)]' &= u'(x) \cdot \operatorname{sh} u(x); & 14) \quad [\operatorname{arctg} u(x)]' &= \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}; \\
10) \quad [\operatorname{th} u(x)]' &= \frac{u'(x)}{\operatorname{ch}^2 u(x)}; & 15) \quad [\operatorname{arcctg} u(x)]' &= -\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}. \\
11) \quad [\operatorname{cth} u(x)]' &= -\frac{u'(x)}{\operatorname{sh}^2 u(x)};
\end{aligned}$$

**1.9.1** Найдите  $y'(x)$ , если:

а)  $y(x) = 2x^{3/4} - 4x^{7/5} + 3x^{-2}$ ;

б)  $y(x) = \frac{a}{\sqrt[4]{x^5}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x}}$  ( $a$  и  $b$  — постоянные).

*Решение.* а) применяя правило дифференцирования суммы, степенной функции, а также формулу (д), получаем

$$y' = 2 \cdot \frac{3}{4} x^{(3/4)-1} - 4 \cdot \frac{7}{5} x^{(7/5)-1} + 3(-2) \cdot x^{-2-1} = \frac{3}{2} \cdot x^{-1/4} - \frac{28}{5} x^{2/5} - 6x^{-3} = \frac{3}{2\sqrt[4]{x}} - \frac{28}{5} \sqrt[5]{x^2} - \frac{6}{x^3};$$

б) в подобных случаях удобнее освободиться от радикалов и записать

$$y = ax^{-5/4} - bx^{-4/3}, \text{ а затем находить производную}$$

$$y' = -\frac{5}{4} ax^{(-5/4)-1} + \frac{4}{3} bx^{(-4/3)-1} = -\frac{5}{4} ax^{-9/4} + \frac{4}{3} bx^{-7/3} = -\frac{5a}{4x^2\sqrt[4]{x}} + \frac{4b}{3x^2\sqrt[3]{x}}.$$

**1.9.2** Найдите  $y'(x)$ , если:

а)  $y(x) = x^3 \arcsin x$ ; б)  $y = (x^2 + 1) \operatorname{arctg} x$ ;

в)  $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ ; г)  $y = \frac{x + \sqrt{x}}{x - 2\sqrt[3]{x}}$ .

*Решение.* а) применяем правило дифференцирования произведения (формулу (в)). Получаем

$$y' = (x^3)' \arcsin x + x^3 (\arcsin x)' = 3x^2 \arcsin x + \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Такие подробные записи делать впредь не рекомендуем, следует сразу применять соответствующие формулы;

б)  $y' = 2x \operatorname{arctg} x + \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 2x \operatorname{arctg} x + 1$ ;

в) применяем формулу (г) — правило дифференцирования частного:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{(\sin x - \cos x)'(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)'(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \\
&= \frac{(\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x) - (\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \\
&= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2};
\end{aligned}$$

$$\Gamma) y = \frac{x + x^{1/2}}{x - 2x^{1/3}},$$

$$y' = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}x^{-1/2}\right)(x - 2x^{1/3}) - (x + x^{1/2})\left(1 - \frac{2}{3}x^{-2/3}\right)}{(x - 2x^{1/3})^2}.$$

Последнее выражение можно несколько упростить, но мы этого делать не будем.

**1.9.3** Найдите производные и вычислите их значение в указанной точке:

$$\text{а) } y = 3 - \sqrt[3]{x^5} + \frac{64}{x}, x_0 = -2\sqrt{2}; \quad \text{б) } y = \frac{\sin t}{1 - \cos t}, t = \frac{\pi}{3}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \text{а) } y' &= (3 - x^{5/3} + 64x^{-1})' = -\frac{5}{3}x^{2/3} - 64x^{-2} = \\ &= -\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2} - \frac{64}{x^2}, \quad y'(-2\sqrt{2}) = -\frac{5}{3}\sqrt[3]{8} - \frac{64}{8} = -\frac{10}{3} - 8 = -\frac{34}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } y' &= \frac{\cos t(1 - \cos t) - \sin t \sin t}{(1 - \cos t)^2} = \frac{\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t}{(1 - \cos t)^2} = \\ &= \frac{\cos t - 1}{(1 - \cos t)^2} = \frac{-1}{1 - \cos t}, \quad y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{1 - 1/2} = -2. \end{aligned}$$

**1.9.4** Пользуясь правилами дифференцирования сложной функции, найдите производную следующих функций:

$$\text{а) } y = \cos^5 x; \quad \text{б) } y = \ln \sin x; \quad \text{в) } y = 5^{\lg x};$$

$$\text{г) } y = \ln \cos(x^4 + 2); \quad \text{д) } y = \arccos \sqrt{1 - x^2};$$

$$\text{е) } y = (\arctg 2x)^3; \quad \text{ж) } y = \sin^3 \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

*Решение.* а) обозначим  $u(x) = \cos x$ . Тогда  $y = u^5$ . По первой формуле в таблице производных находим

$$y' = 5u^4 \cdot u'_x = 5 \cos^4 x (\cos x)' = 5 \cos^4 x (-\sin x);$$

б) обозначим  $u(x) = \sin x$ , тогда  $y = \ln u$ . По третьей формуле в таблице производных находим

$$y' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{tg} x.$$

Приобретая некоторый опыт, эти замены нужно делать мысленно, не записывая их;

$$\text{в) } (5^{\lg x})' = 5^{\lg x} \cdot \frac{\ln 5}{\cos^2 x}. \quad (\text{Здесь } u(x) = \lg x, u'(x) = \frac{1}{\cos^2 x});$$

$$\text{г) } [\ln \cos(x^4 + 2)]' = \frac{-\sin(x^4 + 2)}{\cos(x^4 + 2)} \cdot 4x^3;$$

$$\text{д) } (\arccos \sqrt{1 - x^2})' = -\frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{1 - x^2})^2}} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{е) } [(\operatorname{arctg} 2x)^3]' = 3(\operatorname{arctg} 2x)^2 \cdot \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot 2;$$

$$\text{ж) } \left[ \sin^3 \frac{1}{\sqrt{x}} \right]' = 3 \sin^2 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left( -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \right).$$

Вы заметили, что функция  $u(x)$  сама может быть сложной функцией. От неё находить производную нужно по тем же табличным формулам.

**1.9.5** Найдите производные следующих функций:

$$\text{а) } y = (2 + 5x^2 + 4x^3)^{10}; \quad \text{б) } y = \sqrt[4]{\sin^3 2x} + \frac{1}{\cos^4 3x};$$

$$\text{в) } y = \sqrt{e^{3x} + 2^{4x} + 3} + \ln^3 2x; \quad \text{г) } y = \operatorname{arctg} \ln x + \ln \operatorname{arctg} x.$$

$$\text{Решение. а) } [(2 + 5x^2 + 4x^3)^{10}]' = 10(2 + 5x^2 + 4x^3)^9 (10x + 12x^2);$$

$$\begin{aligned} \text{б) } y' &= (\sin^{3/4} 2x + \cos^{-4} 3x)' = \frac{3}{4} \sin^{-1/4} 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 - 4 \cos^{-5} 3x (-\sin 3x) \cdot 3 = \\ &= \frac{3 \cos 2x}{2\sqrt[4]{\sin 2x}} + \frac{12 \sin 3x}{\cos^5 3x}; \end{aligned}$$

$$\text{в) } y' = \frac{1}{2} (e^{3x} + 2^{4x} + 3)^{-1/2} (e^{3x} \cdot 3 + 2^{4x} \cdot \ln 2 \cdot 4) + 3 \ln^2 2x \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2;$$

$$\text{г) } y' = \frac{1}{1 + (\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1 + x^2}.$$

Если требуется продифференцировать произведение и частное с большим числом сомножителей, то иногда выгодно функцию предварительно прологарифмировать.

$$\text{1.9.6 Найдите производную функции } y = \frac{\sqrt[3]{1 + \sin x} \cdot (1 + x^2)}{\sqrt[3]{1 + \operatorname{tg}^2 x} \cdot \sqrt[5]{4 - x}}.$$

*Решение.*

$$\ln |y| = \frac{1}{3} \ln |1 + \sin x| + \ln(1 + x^2) - \frac{1}{3} \ln(1 + \operatorname{tg}^2 x) - \frac{1}{5} \ln |4 - x|.$$

Выполним дифференцирование:

$$\frac{y'}{y} = \frac{\cos x}{3(1 + \sin x)} + \frac{2x}{1 + x^2} - \frac{2 \operatorname{tg} x}{3(1 + \operatorname{tg}^2 x)} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{5} \cdot \frac{-1}{4 - x}.$$

Следовательно,

$$y' = \frac{\sqrt[3]{1 + \sin x} \cdot (1 + x^2)}{\sqrt[3]{1 + \operatorname{tg}^2 x} \cdot \sqrt[5]{4 - x}} \left[ \frac{\cos x}{3(1 + \sin x)} + \frac{2x}{1 + x^2} - \frac{2 \operatorname{tg} x}{3(1 + \operatorname{tg}^2 x) \cos^2 x} + \frac{1}{5(4 - x)} \right].$$

Продифференцировать степенно-показательную функцию  $y = u(x)^{v(x)}$ ,  $u(x) > 0$  можно, либо прологарифмировав её, либо используя логарифмическое тождество  $y = e^{v(x) \ln u(x)}$ . В результате получим

$$y' = u(x)^{v(x)} [v(x) \ln u(x)]' = u(x)^{v(x)} \left[ v'(x) \ln u(x) + \frac{v(x) \cdot u'(x)}{u(x)} \right].$$

**1.9.7** Найдите производную от функции  $y = (\sin^2 x)^{\cos 3x}$ .

*Решение.* Используя логарифмическое тождество, можем записать  $y = e^{\cos 3x \cdot \ln \sin^2 x}$ . Находим

$$\begin{aligned} y' &= e^{\cos 3x \cdot \ln \sin^2 x} \cdot \left( -3 \sin 3x \cdot \ln \sin^2 x + \cos 3x \cdot \frac{2 \sin x \cos x}{\sin^2 x} \right) = \\ &= (\sin^2 x)^{\cos 3x} \cdot (-3 \sin 3x \ln \sin^2 x + 2 \cos 3x \cdot \operatorname{ctg} x). \end{aligned}$$

**1.9.8** Найдите производные следующих векторных функций одного скалярного аргумента:

$$\text{а) } f(x) = \begin{bmatrix} \sin^3 x^2 \\ x^3 \\ \frac{1+x}{1-x} \end{bmatrix}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{bmatrix} x^2 \\ 2^x \\ \operatorname{tg}^4 x^3 \end{bmatrix}.$$

*Решение.* а) чтобы найти производную от  $f(x)$ , нужно найти производные от координатных функций. Поэтому

$$f'(x) = \begin{bmatrix} (\sin^3 x^2)' \\ (x^3)' \\ \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \sin^2 x^2 \cos x^2 \cdot 2x \\ 3x^2 \\ \frac{(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \sin^2 x^2 \cos x^2 \cdot 2x \\ 3x^2 \\ \frac{2}{(1-x)^2} \end{bmatrix};$$

$$\text{б) } f'(x) = \begin{bmatrix} (x^2)' \\ (2^x)' \\ (\operatorname{tg}^4 x^3)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2^x \ln 2 \\ 4 \operatorname{tg}^3 x^3 \cdot \frac{3x^2}{\cos^2 x^3} \end{bmatrix}.$$

Часто подобные функции записывают в виде  $\mathbf{a}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$ . Тогда

$$\mathbf{a}'(t) = f_1'(t)\mathbf{i} + f_2'(t)\mathbf{j} + f_3'(t)\mathbf{k}.$$

Например, если  $\mathbf{a}(t) = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$ , то  $\mathbf{a}'(t) = \cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} + \mathbf{k}$ .

### Задачи для самостоятельного решения

**1.9.9** Найдите производную данной функции и вычислите значение производной в точке  $x_0 = 1$ :

$$\text{а) } y(x) = 4x^{7/3} + 5x^{5/2} + \sqrt{x} + 1;$$

$$\text{б) } y(x) = \frac{3}{x^3 \sqrt{x^2}} + \frac{8}{x^2 \sqrt[4]{x^3}} + 2;$$

$$\text{в) } y(x) = 2x^3 \sqrt{x^3} + 3x^2 \sqrt[3]{x^5} + 3.$$

**1.9.10** Найдите производную  $y'(x)$  данной функции и вычислите значение производной в точке  $x_0$ :

$$\text{а) } y = (x^2 + 2x + 2) \arcsin(0,5 + x), \quad x_0 = 0;$$

$$\text{б) } y = x^4 \operatorname{arctg} 2x; \quad x_0 = \frac{1}{2}; \quad \text{в) } y = \frac{1 + \sin 2x}{3 + 4x}, \quad x_0 = 0;$$

$$\text{г) } y = \frac{\cos x + \sin x}{3 - \cos x}, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}; \quad \text{д) } y = e^{2x}(\cos x + 2 \sin x), \quad x_0 = 0.$$



**1.9.11** Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите производные от следующих функций и вычислите их значение в указанной точке:

а)  $y(x) = (x^4 + 3x^2 + 2x + 3)^{20}$ ,  $x_0 = 0$ ;

б)  $y(x) = \sqrt{2} \sin^5 2x$ ;  $x_0 = \frac{\pi}{8}$ ; в)  $y(x) = \ln \cos 4x$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{12}$ ;

г)  $y(x) = 3^{\operatorname{tg} 2x}$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{8}$ ; д)  $y(x) = (\operatorname{arccotg} \sqrt{x})^2$ ,  $x_0 = 1$ ;

е)  $y(x) = \left( \arcsin \frac{1+x}{1-x} \right)^2$ ,  $x_0 = -1/3$ ;

ж)  $y(x) = \cos^3 \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ ,  $x_0 = 1$ ; з)  $y(x) = \ln \ln \ln x$ ,  $x_0 = e^2$ ;

и)  $y(x) = \left( \arccos \frac{x}{x+2} \right)^4$ ,  $x_0 = 0$ .

**1.9.12** Найдите производные следующих функций, предварительно их прологарифмировав:

а)  $y(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^4} \sqrt{(x+3)^5}}$ ; б)  $y(x) = e^x \cdot \sin 2x \cdot \cos 3x \cdot \operatorname{tg} 5x$ .

**1.9.13** Найдите производные следующих степенно-показательных функций:

а)  $y = (\ln x)^{\sqrt[3]{x}}$ ; б)  $y = (\sqrt{x})^x$ ; в)  $y = \sqrt[x]{x^2 + 1}$ .

**1.9.14** Докажите, что функция  $y(x) = \frac{x - e^{-x^2}}{2x^2}$  удовлетворяет дифференциальному уравнению  $xy' + 2y = e^{-x^2} + \frac{1}{2x}$ .

**1.9.15** Найдите производные следующих функций, содержащих гиперболические функции:

а)  $f(x) = \operatorname{sh} \frac{x}{2} + \operatorname{ch} \frac{x}{2}$ ; б)  $f(x) = \ln \operatorname{ch} x$ ;

в)  $f(x) = \arcsin(\operatorname{th} x)$ ; г)  $f(x) = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 4x}$ .

**1.9.16** Найдите производные следующих функций:

а)  $y(x) = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$ ;

б)  $y(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}}$ ;

в)  $y(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$ ; г)  $y(x) = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{1+x^2})$ .

## 1.10 Производная высших порядков функций одного аргумента

Предлагается изучить п. 2.5 учебного пособия.

Производную  $y'(x)$  функции  $y(x)$  иногда называют производной первого порядка. Производная  $y'(x)$  сама является функцией от  $x$ , от неё также можно взять производную  $[y'(x)]'$ , обозначаемую  $y''(x)$  и называемую второй производной, или производной второго порядка. Аналогично можно получить производную любого порядка  $n$ . Её обозначают  $y^{(n)}(x)$ .

Используя таблицу производных и метод математической индукции, легко доказать справедливость следующих формул:

$$(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n; \quad (\text{a})$$

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}; \quad (\text{б})$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right); \quad (\text{в})$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right). \quad (\text{г})$$

**1.10.1** Найдите производные второго порядка от следующих функций:

а)  $y = (1+x^2) \operatorname{arctg} x$ ; б)  $y = \sqrt{1-x^2} \arcsin x$ ;

в)  $y = \ln(x + \sqrt{9+x^2})$ ; г)  $y = e^{\sqrt{x}}$ .

*Решение.*

а)  $y'(x) = 2x \operatorname{arctg} x + \frac{1+x^2}{1+x^2} = 2x \operatorname{arctg} x + 1$ ,  $y''(x) = 2 \operatorname{arctg} x + \frac{2x}{1+x^2}$ ;

б)  $y'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + 1$ ,

$$y''(x) = \left[ -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \right] \arcsin x - \frac{x}{1-x^2} = -\frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} - \frac{x}{1-x^2};$$

в)  $y' = [\ln(x + \sqrt{9+x^2})]' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}}{x + \sqrt{9+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}$ ,

$$y''(x) = [(9+x^2)^{-1/2}]' = -\frac{1}{2}(9+x^2)^{-3/2} \cdot 2x = -\frac{x}{(\sqrt{9+x^2})^3};$$

г)  $y' = (e^{\sqrt{x}})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$ ,  $y'' = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{4x} e^{\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{4x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{4x\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1)$ .

**1.10.2** Найдите производные  $n$ -го порядка от следующих функций:

а)  $y = 2^{3x}$ ; б)  $y = \sin 3x \cdot \sin 5x$ ; в)  $y = \frac{3x+2}{4x+5}$ .

*Решение.*

$$\text{а) } y' = 2^{3x} \ln 2 \cdot 3, y'' = 2^{3x} (\ln 2)^2 \cdot 3^2, \dots, y^{(n)} = 2^{3x} (\ln 2)^n \cdot 3^n$$

(применили формулу (а));

$$\text{б) } y = \sin 3x \cdot \sin 5x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x), \text{ поэтому}$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} \left[ 2^n \cos \left( 2x + n \frac{\pi}{2} \right) - 8^n \cos \left( 8x + n \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

(см. формулу(г));

в) чтобы применить формулу (б), преобразуем выражение для функции

$$y(x) = \frac{3x+2}{4x+5} = \frac{3}{4} - \frac{7}{4(4x+5)}$$

(выполнили деление по правилу деления многочленов).

Применяя формулу (б), получаем

$$y^{(n)} = -\frac{7(-1)^n n! 4^n}{4(4x+5)^{n+1}} = \frac{7(-1)^{n+1} 4^{n-1}}{(4x+5)^{n+1}}.$$

### Задачи для самостоятельного решения

**1.10.3** Найдите производные второго порядка от следующих функций:

$$\text{а) } f(x) = \frac{1}{12} \ln \left| \frac{2+3x}{2-3x} \right|; \quad \text{б) } f(x) = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3}{4}x; \quad \text{в) } f(x) = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{3}{2}x.$$

**1.10.4** Найдите производные порядка  $n$  от следующих функций:

$$\text{а) } y = x \ln x; \quad \text{б) } y = \frac{x^2}{x-1}; \quad \text{в) } y = \sin 2x \cos 4x; \quad \text{г) } y = \frac{5x+22}{(x+4)(x+5)}.$$

**1.10.5** Применяя формулу Лейбница, найдите производные указанного порядка от следующих функций:

$$\text{а) } y = x^2 \sin x, \text{ найдите } y^{(10)}; \quad \text{б) } y = x \operatorname{ch} x, \text{ найдите } y^{(100)};$$

$$\text{в) } y = 3^x \cdot x^2, \text{ найдите } y^{(20)};$$

**1.10.6** Найдите  $y'''$ , если:

$$\text{а) } y = \begin{bmatrix} x^3/6 \\ x^4/24 \\ x^5/60 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } y = \begin{bmatrix} \sin 2x \\ \cos 2x \\ x^3 \end{bmatrix}; \quad \text{в) } y = (t^3+1)\mathbf{i} + (t^2+2)\mathbf{j} + \sin t\mathbf{k}.$$

## 1.11 Частные производные

Предлагается изучить п. 2.2 и п. 2.5 учебного пособия.

Мы уже отмечали, что элементами производной матрицы в случае функций векторного аргумента (функций многих скалярных аргументов) являются частные производные — производные по одному из аргументов при фиксированных всех

остальных. Чтобы найти частную производную  $\frac{\partial z}{\partial x}$  от функции  $z(x, y)$ , нужно взять производную по  $x$ , считая аргумент  $y$  константой. Напомним, что производная константы равна нулю и что константу-сомножитель можно выносить за знак производной. Аналогично находят  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , считая аргумент  $x$  константой.

**1.11.1** Найдите частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  от следующих функций:

а)  $z = \sqrt{x^2 + y^2} + 2xy$ ; б)  $z = \arctg \frac{x}{y} + x^2$ ; в)  $z = e^{2x} \cos y - e^{3y} \sin x$ .

*Решение.*

а) считая  $y$  константой, находим  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x + 2y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2y$ .

Полагая  $x = \text{const}$ , получаем  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2x$ ;

б)  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + (x/y)^2} \cdot \frac{1}{y} + 2x = \frac{y}{x^2 + y^2} + 2x$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + (x/y)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{-x}{x^2 + y^2}$ ;

в)  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x} \cos y - e^{3y} \cos x$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -e^{2x} \sin y - 3e^{3y} \sin x$ .

**1.11.2** Докажите, что функция  $z = \ln(x^2 + y^2)$  удовлетворяет уравнению

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

*Решение.*  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$ , следовательно,

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} - \frac{2yx}{x^2 + y^2} = 0,$$

что и требовалось доказать.

**1.11.3** Найдите производную матрицу следующих функций:

а)  $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$ ; б)  $u = \begin{bmatrix} x \sin y \\ y \sin x \end{bmatrix}$ .

*Решение.*

а) функция  $u(x, y)$  отображает некоторое множество из  $R_3$  в  $R$ . Для таких функций производная матрица  $u'$  имеет вид  $u' = \left[ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right]$ ,

т. е.  $u' = \left[ \frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}, -\frac{y}{z^2} \right]$ ;

б) в этом случае функция  $u(x, y)$  отображает некоторое множество из  $R_2$  в  $R_2$ . Как нам известно из теории (см. п. 2.2 учебного пособия), производная матрица

для этих функций имеет вид  $u' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$ , где  $f_1(x, y)$  и  $f_2(x, y)$  — координатные

функции. Поэтому  $u' = \begin{bmatrix} \sin y & x \cos y \\ y \cos x & \sin x \end{bmatrix}$ .

**1.11.4** Найдите частные производные от функции  $z = (\sin^2 x)^{\cos^2 y}$ .

*Решение.* Используя правило дифференцирования степенной функции, если  $y$  — константа, и показательной, если  $x$  — константа, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos^2 y (\sin^2 x)^{\cos^2 y - 1} \cdot 2 \sin x \cos x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (\sin^2 x)^{\cos^2 y} \cdot \ln \sin^2 x \cdot 2 \cos y (-\sin y).$$

**1.11.5** Найдите частные производные  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z}$  от функции  $u = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

и вычислите их значения в точке  $M_0(1, 2, 2)$ .

*Решение.* Считая аргументы  $y$  и  $z$  константами, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} [y(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}] = -\frac{1}{2} y (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2x = \frac{-xy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, 2, 2) &= \frac{-2}{\sqrt{9^3}} = -\frac{2}{27}. \end{aligned}$$

Далее, полагая  $x$  и  $z$  константами, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} - \frac{y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = \frac{x^2 + z^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(1, 2, 2) &= \frac{1 + 2^2}{\sqrt{9^3}} = \frac{5}{27}. \end{aligned}$$

Аналогично находим  $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{yz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$ ;  $\frac{\partial u}{\partial z}(1, 2, 2) = -\frac{4}{27}$ .

Вы заметили, что частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  (их называют частными производными первого порядка) от функции  $z(x, y)$  сами являются функциями аргументов  $x$  и  $y$ . От этих производных также можно взять частные производные и получить производные второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}, & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy}, & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy}. \end{aligned}$$

Итак, в случае функции двух аргументов получили четыре частных производных второго порядка  $z''_{xx}$ ,  $z''_{xy}$ ,  $z''_{yx}$ ,  $z''_{yy}$ . От этих производных можно также взять частные производные и получить восемь производных третьего порядка  $z'''_{xxx}$ ,  $z'''_{xxy}$ ,  $z'''_{xyx}$ ,  $z'''_{xyy}$ ,  $z'''_{yxx}$ ,  $z'''_{yxy}$ ,  $z'''_{yyx}$ ,  $z'''_{yyy}$ . Частные производные высших порядков, в которые входит дифференцирование по различным аргументам, называют смешанными.

Справедлива теорема: если смешанные частные производные существуют в точке и некоторой её окрестности и непрерывны в ней, то эти смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования, а зависят только от общего

числа дифференцирований по каждому аргументу. Поэтому если условия теоремы выполнены, то  $z''_{xy} = z''_{yx}$ ,  $z'''_{xxy} = z'''_{xyx} = z'''_{yxx}$ ,  $z'''_{yyx} = z'''_{yxy} = z'''_{xyy}$ . В этом случае для смешанных производных третьего порядка вводят обозначения  $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$  или  $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$  или  $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ . Аналогично можно рассмотреть частные производные четвертого порядка, например,  $\frac{\partial^4 z}{\partial^2 x \partial^2 y}$ ,  $\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}$ ,  $\frac{\partial^4 z}{\partial^3 x \partial y}$  и т. д. Таким же образом можно получить частные производные высших порядков функций любого числа аргументов.

**1.11.6** Найдите частные производные второго порядка от следующих функций:

а)  $z = e^{xy}$ ; б)  $z = x \sin y$ .

*Решение.*

$$\text{а) } \frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^{xy} + yxe^{xy} = e^{xy}(1 + xy),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy};$$

$$\text{б) } \frac{\partial z}{\partial x} = \sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x \sin y.$$

**1.11.7** Найдите частные производные третьего порядка от функции

$$z = x^5 + 4x^4y - 2x^3y^2 + 3x^2y^3 + y^4.$$

*Решение.*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 + 16x^3y - 6x^2y^2 + 6xy^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4x^4 - 4x^3y + 9x^2y^2 + 4y^3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 20x^3 + 48x^2y - 12xy^2 + 6y^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 16x^3 - 12x^2y + 18xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4x^3 + 18x^2y + 12y^2,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 60x^2 + 96xy - 12y^2, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 48x^2 - 24xy + 18y^2,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = -12x^2 + 36xy, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 18x^2 + 24y.$$

**1.11.8** Докажите, что функция  $z = \arctg(y/x)$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

*Решение.*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + (y^2/x^2)} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Видим, что  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ , что и требовалось доказать.

**Задачи для самостоятельного решения**

**1.11.9** Найдите частные производные первого порядка от следующих функций:

а)  $z(x, y) = x^4 y^3 + 2y \ln x$ ; б)  $z(x, y) = (\sin x)^{\cos y} + (\cos y)^{\sin x}$ ;

в)  $u(x, y, z) = \arctg \frac{xy}{z}$ ; г)  $u(x, y, z) = z^{x/y}$ .

**1.11.10** Найдите производную матрицу следующих функций:

а)  $u(x, y) = \begin{vmatrix} \sin(x^2 + y^2) \\ \cos(x^2 + y^2) \end{vmatrix}$ ; б)  $u(x, y) = \begin{vmatrix} e^x \operatorname{tg} y \\ e^y \operatorname{tg} x \end{vmatrix}$ .

**1.11.11** Найдите частные производные первого порядка от функции

$u(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  и вычислите их значение в точке  $M_0(2, -1, -2)$ .

**1.11.12** Найдите частные производные второго порядка от следующих функций:

а)  $z(x, y) = x^2 y^3 + x^3 y^2$ ; б)  $z(x, y) = e^{2x-4y}$ ;

в)  $z(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ ; г)  $z(x, y) = \arcsin(xy)$ .

**1.11.13** Найдите частные производные второго порядка и вычислите их значения в указанной точке  $M_0$  от следующих функций:

а)  $u(x, y, z) = e^{x^2+2y+3z}$ ,  $M_0(0, 0, 0)$ ; б)  $u(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $M_0(3, -4, 25)$ .

**1.11.14** Найдите частные производные третьего порядка и вычислите их значения в указанной точке  $M_0$  от следующих функций:

а)  $u(x, y, z) = \sin(2x + 3y + 4z)$ ,  $M_0(0, 0, 0)$ ;

б)  $u(x, y) = x^4 + 2x^3 y - 3x^2 y^2 + 2xy^3 + y^4$ ,  $M_0(1, 2)$ .

**1.11.15** Докажите, что функция  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

**1.11.16** Найдите  $\frac{dz}{dx}$  и  $\frac{d^2 z}{dx^2}$ , если:

а)  $z = f(u, v)$ ,  $u = \frac{1}{x^2}$ ,  $v = \ln x$ ; б)  $z = f(u, v)$ ,  $u = e^{2x}$ ,  $v = \sin x$ ;

в)  $z = f(x, u, v)$ ,  $u = x^2$ ,  $v = x^3$ ; г)  $z = \sin^2 x f(u, v)$ ,  $u = 2x$ ,  $v = 5x$ .

**1.11.17** Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ , если:

а)  $z = f(u, v)$ ,  $u = xy$ ,  $v = \frac{x}{y}$ ; б)  $z = f(u, v)$ ,  $u = 2x + 3y$ ,  $v = 4x - 2y$ .

## 1.12 Производная по направлению

Рекомендуется изучить п. 2.4 учебного пособия.

Пусть дана функция  $f(M) = f(x, y, z)$ , имеющая в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  конечные частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ .

Производную по направлению вектора  $\mathbf{a}$ , отличного от нулевого, как показано в п. 2.4 учебного пособия, можно найти по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial a}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) \cos \gamma,$$

где  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  — направляющие косинусы вектора  $\mathbf{a}$ .

Вектор  $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \frac{\partial f}{\partial y}(M_0), \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) \right\}$ , совпадающий с производной матрицей функции  $f(M)$  в точке  $M_0$ , называют градиентом функции  $f(M)$  в точке  $M_0$  и обозначают  $\text{grad} f(M_0)$ .

Производную в направлении вектора  $\mathbf{a}$  можно найти по формуле:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = (\text{grad} f(M_0), \mathbf{a}_0),$$

где  $\mathbf{a}_0$  — орт вектора  $\mathbf{a}$ , т. е. вектор, направленный так же, как вектор  $\mathbf{a}$ , но по длине равный единице. Напомним, что если  $\mathbf{a} = \{x, y, z\}$ , то

$$\mathbf{a}_0 = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right\}.$$

**1.12.1** Найдите градиент и производную по направлению  $\mathbf{a} = \{3, 0, -4\}$  в точке  $M_0(1, 2, -3)$  функции  $f(x, y, z) = \arctg \frac{yz + 1}{x}$ .

*Решение.*

Найдем сначала  $\text{grad} f(M_0)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \frac{(yz + 1)^2}{x^2}} \cdot \frac{-(yz + 1)}{x^2} = -\frac{yz + 1}{x^2 + (yz + 1)^2}, & \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) &= \frac{5}{26}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{1 + \frac{(yz + 1)^2}{x^2}} \cdot \frac{z}{x} = \frac{xz}{x^2 + (yz + 1)^2}, & \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) &= -\frac{3}{26}, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{1 + \frac{(yz + 1)^2}{x^2}} \cdot \frac{y}{x} = \frac{yx}{x^2 + (yz + 1)^2}, & \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) &= \frac{2}{26}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\text{grad} f(M_0) = \left\{ \frac{5}{26}, -\frac{3}{26}, \frac{2}{26} \right\}$ .

Находим орт вектора  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{a}_0 = \left\{ \frac{3}{\sqrt{3^2 + 0 + 4^2}}, 0, \frac{-4}{\sqrt{3^2 + 0 + 4^2}} \right\} = \left\{ \frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5} \right\}.$$



Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(M_0) = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{5}{26}\right) + 0 \cdot \left(-\frac{3}{26}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{2}{26} = \frac{7}{130}.$$

**1.12.2** Найдите производную от функции  $f(x, y, z) = x^3y - xy^3 - 3z^2$  в точке  $M_0(1, 1, -1)$  по направлению, идущему от точки  $M_0$  в точку  $A(3, -1, -2)$ .

*Решение.*

Находим  $\text{grad}f(x, y, z)$  в точке  $M_0$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y - y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - 3xy^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -6z, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) = 6.$$

Итак,  $\text{grad}f(M_0) = \{2, -2, 6\}$ .

Находим координаты вектора  $\mathbf{a} = \mathbf{M}_0\mathbf{A} = \{2, -2, -1\}$ .

Так как  $|\mathbf{a}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$ , то орт  $\mathbf{a}_0$  вектора  $\mathbf{a}$  имеет координаты  $\left\{\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$ .

Поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial a} = (\text{grad}f(M_0), \mathbf{a}_0) = 2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} - 6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

**1.12.3** Определите, по какому направлению в точке  $M_0(-2, -2, 2)$  функция  $f(x, y, z) = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$  изменяется наиболее быстро и какова максимальная скорость этого изменения.

*Решение.* Наиболее быстро функция изменяется в направлении её градиента, а максимальная скорость изменения равна  $|\text{grad}f(x, y, z)|$ . Так как

$$\text{grad}f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = (2xy^2 + 2xz^2)\mathbf{i} + (2x^2y + 2yz^2)\mathbf{j} + (2x^2z + 2y^2z)\mathbf{k},$$

то  $\text{grad}f(M_0) = -32\mathbf{i} - 32\mathbf{j} + 32\mathbf{k}$ .

Наиболее быстро функция  $f(x, y, z)$  изменяется в направлении вектора  $\{1, 1, -1\}$ , при этом

$$\max \left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| = |\text{grad}f(M_0)| = 32\sqrt{1 + 1 + 1} = 32\sqrt{3}.$$

### Задачи для самостоятельного решения

**1.12.4** Найдите градиент в указанной точке  $M_0$  для следующих функций:

а)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $M_0(1, -2, -2)$ ;

б)  $f(x, y, z) = \frac{yz^2}{x^2}$ ,  $M_0\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .

**1.12.5** Для данной функции в указанной точке найдите направление  $\mathbf{l}$ , в котором она изменяется наиболее быстро, укажите максимальную скорость этого изменения:

а)  $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xy - 4x + 2y - 4z$ ,  $M_0(0, 0, 1)$ ;

б)  $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x$ ,  $M_0(2, 1, 2)$ .

**1.12.6** Найдите производные по указанному направлению в данной точке от следующих функций:

а)  $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ ,  $\mathbf{a} = \{3, 4, 12\}$ ,  $M_0(1, 2, -1)$ ;

б)  $f(x, y, z) = x^2 - 3yz + 5$ ,  $\mathbf{a} = \{1, 1, 1\}$ ,  $M_0(2, 1, 3)$ .

**1.12.7** Найдите производную функции  $z = x^2 - xy - 2y^2$  в точке  $P(1, 2)$  в направлении, составляющем с осью  $OX$  угол  $60^\circ$ .

**1.12.8** Найдите производную функции  $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  в точке  $M(1, 1)$  в направлении биссектрисы первого координатного угла.

**1.12.9** Найдите косинус угла между градиентами функции  $z = \ln \frac{y}{x}$  в точках  $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$  и  $B(1, 1)$ .

## 1.13 Производные параметрически заданных функций

Рекомендуется изучить п. 2.6 учебного пособия.

Если функция  $y = f(x)$  задана параметрически в виде  $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in T$ , и функции  $x(t)$  и  $y(t)$  имеют производные достаточно высокого порядка, то производные  $y'_x, y''_{xx}, \dots, y^{(n)}_{(x)}$  можно найти по формулам:

$$\begin{cases} y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \\ x = x(t), \end{cases} \quad \begin{cases} y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \\ x = x(t), \end{cases} \quad \begin{cases} y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \\ x = x(t) \end{cases} \quad \text{и т. д.}$$

**1.13.1** Найдите  $y'_x$  и  $y''_{xx}$ , если функция  $y = f(x)$  задана параметрически

$$\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$$

Вычислите значение  $y''_{xx}$  при  $t = 1$ .

*Решение.* Найдем сначала  $x'_t$  и  $y'_t$ :  $x'_t = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $y'_t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$ ,

следовательно,  $\frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t^2/(1+t^2)}{2t/(1+t^2)} = \frac{t}{2}$ , поэтому  $\begin{cases} y'_x = \frac{t}{2}, \\ x = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

Так как  $(y'_x)'_t = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{1/2}{2t/(1+t^2)} = \frac{t^2+1}{4t}$ , то  $\begin{cases} y''_{xx} = \frac{t^2+1}{4t}, \\ x = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

При  $t = 1$  вторая производная  $y''_{xx} = \frac{1+1}{4} = \frac{1}{2}$ .

**Задачи для самостоятельного решения**

**1.13.2** Найдите  $y'_x$  от следующих функций, заданных параметрически:

$$\text{а) } \begin{cases} y(t) = \arccos 2t, \\ x(t) = \arcsin(t^2 - 1); \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y(t) = a \sin t + b \cos t, \\ x(t) = 4 \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}. \end{cases}$$

**1.13.3** Найдите  $y''_{xx}$  следующих функций и вычислите значение  $y''_{xx}$  в указанной точке  $t = t_0$ :

$$\text{а) } \begin{cases} y(t) = \frac{t^3}{3} - t, \\ x(t) = t^2 + 2, \end{cases} \quad t_0 = 1; \quad \text{б) } \begin{cases} y(t) = \sqrt{1 - t^2}, \\ x(t) = \arcsin t, \end{cases} \quad t_0 = 0.$$

## 1.14 Дифференцирование функций, заданных неявно

Требуется изучить п. 2.7 учебного пособия.

Пусть уравнение  $\Phi(x, y) = 0$  определяет неявно на  $[a, b]$  функцию  $y = y(x)$ , т. е. на  $[a, b]$  справедливо тождество  $\Phi[x, y(x)] \equiv 0$  относительно  $x$ . Если функция  $\Phi(x, y)$  имеет непрерывные частные производные по  $x$  и по  $y$  и  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} \neq 0$ , то

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}} = -\frac{\Phi'_x}{\Phi'_y}. \quad (\text{а})$$

Если уравнение  $\Phi(x, y, z) = 0$  определяет неявно в области  $D$  функцию  $z = z(x, y)$ , т. е. в области  $D$  выполняется тождество  $\Phi(x, y, z(x, y)) \equiv 0$  относительно  $(x, y) \in D$ , и функция  $\Phi(x, y, z)$  имеет частные производные  $\Phi'_x$ ,  $\Phi'_y$ ,  $\Phi'_z$ , причём  $\Phi'_z \neq 0$ , то справедливы формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\Phi'_x}{\Phi'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\Phi'_y}{\Phi'_z}. \quad (\text{б})$$

**1.14.1** Найдите  $y'_x$  от следующих функций  $y(x)$ , заданных неявно уравнениями:

$$\text{а) } \Phi(x, y) = x^3 + x^2y + y^2 = 0; \quad \text{б) } y^3 = \frac{x - y}{x + y}.$$

*Решение.*

$$\text{а) } y'_x = -\frac{\Phi'_x}{\Phi'_y} = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + 2y};$$

б) данное соотношение перепишем в виде

$$\Phi(x, y) = \frac{y^3(x + y) - x + y}{x + y} = \frac{y^3x + y^4 - x + y}{x + y} = 0.$$

$$\text{Тогда } y'_x = -\frac{2y^3 - 1}{3y^2x + 5y^3 + 1}.$$

**1.14.2** Найдите  $y'_x$  от следующих функций, заданных неявно:

а)  $y = x + \arctg y$ ; б)  $x^2 + 2xy - y^2 = 0$ .

*Решение.* а) в данном случае  $\Phi(x, y) = x + \arctg y - y$ , поэтому

$$y'_x = -\frac{1}{\frac{1}{1+y^2} - 1} = -\frac{1+y^2}{-y^2} = \frac{1}{y^2} + 1.$$

Для отыскания  $y''_{xx}$  дифференцируем по  $x$  последнее соотношение, учитывая, что  $y$  является функцией от  $x$ . Получаем  $y''(x) = -\frac{2}{y^3}y'$ , но  $y' = \frac{y^2+1}{y^2}$ , поэтому  $y''(x) = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}$ ;

б) в рассматриваемом случае  $\Phi(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 = 0$ , поэтому

$$y'(x) = -\frac{2x+2y}{2x-2y} = \frac{x+y}{y-x}.$$

Находим вторую производную, дифференцируя частное  $\frac{x+y}{y-x}$  с учетом, что  $y$  есть функция от  $x$ . Получаем

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{(1+y')(y-x) - (x+y)(y'-1)}{(y-x)^2} = \frac{2y-2xy'}{(y-x)^2} = \\ &= \frac{2y-2x \cdot \frac{x+y}{y-x}}{(y-x)^2} = \frac{2(y^2-x^2-2xy)}{(y-x)^3}. \end{aligned}$$

Можно было бы найти и третью производную, дифференцируя по  $x$  последнее частное.

Подчеркнем, что все производные от неявно заданной функции выражаются явно через  $x$  и  $y$ .

**1.14.3** Найдите значение  $y''(x)$  в точке  $x = 0$ , если  $x^4 - xy + y^4 = 1$  и  $y(0) = 1$ .

*Решение.* В тех задачах, в которых требуется найти только значения производных в указанной точке, а явное их выражение через  $x$  и  $y$  находить не требуется, можно поступить по-другому, не используя формулу (а). Дифференцируем дважды тождество  $x^4 - xy(x) + y^4(x) = 1$  по  $x$ . Получаем

$$\begin{aligned} 4x^3 - y(x) - xy'(x) + 4y^3y'(x) &= 0, \\ 12x^2 - y'(x) - y'(x) - xy''(x) + 12y^2[y'(x)]^2 + 4y^3y''(x) &= 0. \end{aligned}$$

Из первого соотношения при  $x = 0$  и  $y = 1$  получаем  $y'(0) = 1/4$ . Полагая  $x = 0$ ,  $y = 1$ ,  $y'(0) = 1/4$ , из второго соотношения находим  $y''(0) = -1/16$ .

**1.14.4** Функция  $z(x, y)$  задана неявно уравнением

$\Phi(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$ . Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  и вычислите их значения в точке  $(2, 0)$ .

*Решение.* Применяя формулы (б), находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\Phi'_x}{\Phi'_z} = -\frac{4x-8z}{2z-8x-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\Phi'_y}{\Phi'_z} = -\frac{4y}{2z-8x-1}.$$

При  $x = 2, y = 0$  для определения  $z$  получаем уравнение

$$\Phi(2, 0, z) = 8 + z^2 - 16z - z + 8 = z^2 - 17z + 16 = 0.$$

Отсюда находим два значения  $z$ :  $z_1 = 1, z_2 = 16$ , т. е. данное уравнение в окрестности точки  $(2, 0)$  определяет две функции  $z(x, y)$ . Будем вычислять значения частных производных той из них, для которой  $z = 1$ . Теперь

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2, 0) = -\frac{8-8}{2-16-1} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(2, 0) = 0.$$

Находим вторые частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{8z-4x}{2z-8x-1} \right) = \frac{(8z'_x-4)(2z-8x-1) - (2z'_x-8)(8z-4x)}{(2z-8x-1)^2} = \\ &= \frac{(16z-64x-8-16z+8x)z'_x - (8z-32x-4-64z+32x)}{(2z-8x-1)^2} = \\ &= \frac{(56x+8) \cdot \frac{4x-8z}{2z-8x-1} + (56z+4)}{(2z-8x-1)^2}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2, 0) &= \frac{56+4}{(2-16-1)^2} = \frac{60}{15^2} = \frac{4}{15}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{4(2z-8x-1) - 4y \cdot 2z'_y}{(2z-8x-1)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2, 0) = \frac{60}{15^2} = \frac{4}{15}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{4y(2z'_x-8)}{(2z-8x-1)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2, 0) = 0. \end{aligned}$$

Чтобы найти явное выражение  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  и  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  через  $x$  и  $y$ , нужно в соотношения для  $z''_{yy}, z''_{xy}$  подставить выражения для  $z'_y$  и  $z'_x$ .

#### 1.14.5 Функция $z(x, y)$ задана неявно уравнением

$$\Phi(x, y, z) = x^4 y^4 + y^5 + x^2 z^5 + 4z - 5 = 0.$$

Найдите значения частных производных  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  в точке  $M_0(0, 1)$ .

*Решение.* В данной задаче явное выражение частных производных через  $x$  и  $y$  находить не требуется, а нужно найти только их значения в указанной точке. Это можно сделать, не используя формул (б), следующим образом. Заметим, что при  $x = 0, y = 1$  из уравнения  $\Phi(0, 1, z) = 1 + 4z - 5 = 0$  получаем  $z = 1$ . Дифференцируем тождество

$$x^4 y^4 + y^5 + x^2 [z(x, y)]^5 + 4z(x, y) - 5 = 0 \quad (\text{в})$$

$$\text{по } x: 4x^3 y^4 + 2x [z(x, y)]^5 + x^2 \cdot 5 [z(x, y)]^4 z'_x + 4z'_x = 0. \quad (\text{г})$$

Полагая в (г)  $x = 0, y = 1, z(0, 1) = 1$ , получаем  $z'_x(0, 1) = 0$ . Дифференцируем теперь тождество (в) по  $y$ :

$$4x^4y^3 + 5y^4 + 5x^2 [z(x,y)]^4 z'_y(x,y) + 4z'_y(x,y) = 0. \quad (д)$$

Отсюда при  $x = 0, y = 1, z = 1$  следует, что  $5 + 4z'_y(0, 1) = 0$ , поэтому  $z'_y(0, 1) = -5/4$ .

Для отыскания  $z''_{xx}(0, 1)$  дифференцируем по  $x$  тождество (г):

$$12x^2y^4 + 2z^5(x,y) + 10x [z(x,y)]^4 z'_x + 10x [z(x,y)]^4 z'_x(x,y) + \\ + 20x^2 [z(x,y)]^3 (z'_x)^2 + 5x^2 [z(x,y)]^4 z''_{xx} + 4z''_{xx} = 0.$$

Отсюда при  $x = 0, y = 1, z(0, 1) = 1, z'_x(0, 1) = 0$  следует, что  $2 + 4z''_{xx}(0, 1) = 0$ , т. е.  $z''_{xx}(0, 1) = -1/2$ .

Для отыскания  $z''_{yx}$  дифференцируем тождество (г) по переменной  $y$ :

$$16x^3y^3 + 10x [z(x,y)]^4 z'_y(x,y) + 20x^2 [z(x,y)]^3 z'_y \cdot z'_x + 5x^2 [z(x,y)]^4 \cdot z''_{xy} + 4z''_{xy} = 0.$$

Отсюда при  $x = 0, y = 1, z'_x(0, 1) = 0, z'_y(0, 1) = -5/4$  следует, что  $z''_{xy} = 0$ .

Для отыскания  $z''_{yy}$  дифференцируем по переменной  $y$  тождество (д):

$$12x^4y^2 + 20y^3 + 20x^2 [z(x,y)]^3 [z'_y(x,y)]^2 + 5x^2 [z(x,y)]^4 z''_{yy}(x,y) + 4z''_{yy} = 0.$$

Полагаем  $x = 0, y = 1, z(0, 1) = 1, z'_y(0, 1) = -5/4$ . Получаем  $20 + 4z''_{yy}(0, 1) = 0$ , следовательно,  $z''_{yy}(0, 1) = -5$ .

### Задачи для самостоятельного решения

**1.14.6** Найдите  $y'_x$  функций, заданных неявно следующими уравнениями:

а)  $x^4 + y^4 - 3x^2y^2 = 1$ ; б)  $y = 1 + y^x$ .

**1.14.7** Найдите значения  $y'_x$  в указанной точке  $x_0$  функций, заданных неявно следующими уравнениями:

а)  $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0, x_0 = 1$ ; б)  $\ln x + e^{-y/x} = 1, x_0 = 1$ .

**1.14.8** Найдите  $y''(x)$  функций, заданных неявно следующими уравнениями:

а)  $e^x - e^y = y - x$ ; б)  $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}(y/x)$ .

**1.14.9** Найдите значение  $y''(x)$  в указанной точке функций, заданных неявно следующими уравнениями:

а)  $x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$ , при  $x = 0, y = 1$ ;

б)  $x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 2 = 0, x_0 = 1$ .

**1.14.10** Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если функция  $z(x, y)$  задана неявно следующими уравнениями:

а)  $x^3y^2 + x^2z^3 + yz^2 = 1$ ; б)  $xyz + \operatorname{tg} xyz = 1$ .

**1.14.11** Найдите  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ , если функция  $z(x, y)$  задана неявно следующими уравнениями:

а)  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ; б)  $x + y + z = e^z$ .

**1.14.12** Вычислите значения вторых частных производных в указанной точке для функций, заданных неявно следующими уравнениями:

$$\text{а) } z^3 + 3xyz = 4, \quad M_0(1, 1, 1); \quad \text{б) } x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0, \quad M_0(1, -2, 1).$$

## 1.15 Геометрический и механический смысл производной

Рекомендуется изучить пп. 2.8 и 2.9 учебного пособия.

**1.15.1** Закон движения точки по прямой имеет вид  $x(t) = \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{4}t^4 + t^2$  ( $x$  дается в сантиметрах,  $t$  — в секундах). Найдите скорость и ускорение точки в момент времени  $t_0 = 2$  с.

*Решение.* Известно, что скорость точки равна  $v(t_0) = x'(t_0)$ , а ускорение равно  $a(t_0) = x''(t_0)$ . Так как  $x'(t) = t^4 + t^3 + 2t$ ,  $x''(t) = 4t^3 + 3t^2 + 2$ , то

$$v(t_0) = 2^4 + 2^3 + 4 = 28 \text{ см/с}, \quad a(t_0) = 4 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 2 = 46 \text{ см/с}^2.$$

**1.15.2** Тело массой 4 кг движется прямолинейно по закону  $x = t^2 + t + 1$ . Определите его кинетическую энергию в момент времени  $t = 5$  с ( $x$  дается в метрах).

*Решение.* Кинетическую энергию  $W$  можно найти по формуле  $W = \frac{mv^2}{2}$ .

Так как  $v(5) = (2t + 1)_{t=5} = 11$  м/с, то  $W = \frac{4 \cdot 11^2}{2} = 242$  Дж.

Уравнение касательной и нормали к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $(x_0, f(x_0))$  можно записать соответственно в виде

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0); \tag{а}$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{б}$$

**1.15.3** Составьте уравнение касательной и нормали к графику функции  $f(x) = x^3 - 3x + 5$  в точке  $x_0 = 2$ .

*Решение.* В нашем случае

$$y_0 = f(x_0) = f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 5 = 7, \\ f'(x) = 3x^2 - 3, \quad f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9.$$

Записываем, используя формулы (а) и (б), уравнение касательной

$$y - 7 = 9(x - 2), \text{ или } y = 9x - 11, \text{ и нормали } y - 7 = -\frac{1}{9}(x - 2), \text{ или } x + 9y - 65 = 0.$$

**1.15.4** Запишите уравнение касательной и нормали кривой, заданной параметрически  $\begin{cases} x = t^2 + 3t - 8, \\ y = 2t^2 - 2t - 5 \end{cases}$  в точке, соответствующей значению параметра  $t_0 = 1$ .

*Решение.* Находим значение  $x_0, y_0, f'(x_0)$ :

$$x_0 = x(1) = 1 + 3 - 8 = -4, \quad y_0 = y(1) = 2 - 2 - 5 = -5,$$

$$\begin{cases} y'_x = \frac{4t-2}{2t+3}, \\ x = t^3 + 3t - 8, \end{cases} \quad y'(1) = \frac{4-2}{2+3} = \frac{2}{5}.$$

Записываем уравнение касательной  $y + 5 = \frac{2}{5}(x + 4)$ , или  $2x - 5y - 17 = 0$ , и нормали  $y + 5 = -\frac{5}{2}(x + 4)$ , или  $5x + 2y + 30 = 0$ .

**1.15.5** Составьте уравнение касательной и нормали к графику функции  $y(x)$ , заданной неявно уравнением  $x^5 + y^5 - 2xy = 0$  в точке  $M_0(1, 1)$ .

*Решение.* По правилу дифференцирования неявно заданной функции получаем

$$y'_x = -\frac{5x^4 - 2y}{5y^4 - 2x}, \quad y'(1) = -\frac{5-2}{5-2} = -1.$$

Поэтому уравнение касательной  $y - 1 = -1(x - 1)$ , или  $x + y = 2$ , а нормали  $x - y = 0$ .

**1.15.6** Запишите уравнение касательной прямой и нормальной плоскости пространственной кривой, заданной вектор-функцией скалярного аргумента

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{i} + (t^3 - 3)\mathbf{j} + (3t - 1)\mathbf{k} \text{ при } t_0 = 2.$$

*Решение.* Находим координаты точки, соответствующей значению  $t_0 = 2$ :  $M_0(3, 5, 5)$ . Вектор  $\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$  касается данной кривой,  $\mathbf{r}'(2) = 4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ . Касательная проходит через точку  $M_0(3, 5, 5)$  параллельно вектору  $\mathbf{l} = \mathbf{r}'(2)$ . Запишем её канонические уравнения:  $\frac{x-3}{4} = \frac{y-5}{12} = \frac{z-5}{3}$ .

Нормальная плоскость к кривой проходит через точку  $M_0(3, 5, 5)$  перпендикулярно вектору  $\mathbf{N} = \mathbf{r}'(2) = \{4, 12, 3\}$ . Поэтому её уравнение можно записать в виде  $4(x-3) + 12(y-5) + 3(z-5) = 0$ , или  $4x + 12y + 3z - 87 = 0$ .

**1.15.7** Найдите углы, под которыми пересекаются кривые  $y_1 = x^2$  и  $y_2 = \pm\sqrt{x}$ .

*Решение.* Данные кривые пересекаются в двух точках  $M_1(0, 0)$  и  $M_2(1, 1)$ . Поскольку  $y'_1 = 2x$  и  $y'_1(0) = 0$ , то парабола  $y_1 = x^2$  касается оси  $OX$ . Так как  $y'_2 = \pm\frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow 0$ , то кривая  $y_2 = \pm\sqrt{x}$  касается оси  $OY$ . Следовательно, в точке  $M_1(0, 0)$  эти кривые пересекаются под прямым углом. Для точки  $M_2(1, 1)$  получаем  $k_1 = y'_1(1) = 2$ ,  $k_2 = y'_2 = \frac{1}{2}$ . Поэтому

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|k_2 - k_1|}{1 + k_1 k_2} = \frac{|2 - 0,5|}{1 + 0,5 \cdot 2} = \frac{3}{4}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{3}{4},$$

где  $\varphi$  — угол между касательными к данным кривым в точке  $M_2$ .



Пусть поверхность задана уравнением  $z = f(x, y)$ , причем функция  $f(x, y)$  в каждой точке своей области определения имеет непрерывные частные производные. Тогда уравнение касательной плоскости в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  поверхности записывается так:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0. \quad (\text{в})$$

Прямая, проходящая через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  ортогонально касательной плоскости, называется нормалью к поверхности.

Её уравнение:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (\text{г})$$

Если поверхность задана уравнением  $F(x, y, z) = 0$ , неразрешённым относительно  $z$ , т. е. функция  $z = f(x, y)$  задана неявно, то касательная плоскость в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  определяется уравнением

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(M_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(M_0)(z - z_0) = 0, \quad (\text{д})$$

а нормаль — уравнением

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(M_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(M_0)}. \quad (\text{е})$$

Как видим, вектор  $\mathbf{N} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\}$ , называемый вектором нормали к поверхности, совпадает с вектором  $\text{grad} F$ . В этом заключается геометрический смысл производной матрицы функции  $u = F(x, y, z)$ .

**1.15.8** Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $z = x^4 + 2x^2y - xy + x$  в точке  $M_0(1, 0, 2)$ .

*Решение.* Искомые уравнения запишем в форме (в) и (г). Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 4xy - y + 1, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = 4 + 1 = 5, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 - x, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = 2 - 1 = 1.$$

Поэтому уравнение касательной плоскости имеет вид  $5(x - 1) + y - (z - 2) = 0$ , или  $5x + y - z - 3 = 0$ , а нормали —  $\frac{x - 1}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z - 2}{-1}$ .

**1.15.9** Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением

$$F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz - 2xz + 16 = 0,$$

в точке  $M_0(1, 2, 3)$ .

*Решение.* В данной задаче, так как уравнение поверхности задано неявно, используем форму записи (д) и (е).  
Находим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= 2x + y - 2z, & \frac{\partial F}{\partial x}(M_0) &= 2 + 2 - 6 = -2, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 4y + x + z, & \frac{\partial F}{\partial y}(M_0) &= 8 + 1 + 3 = 12, \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= -6z + y - 2x, & \frac{\partial F}{\partial z}(M_0) &= -18 + 2 - 2 = -18.\end{aligned}$$

Вектор  $(-2, 12, -18) \parallel (1, -6, 9)$ . Поэтому в качестве вектора нормали касательной плоскости можно принять вектор  $N(1, -6, 9)$ . Записываем уравнение касательной плоскости  $(x - 1) - 6(y - 2) + 9(z - 3) = 0$ , или  $x - 6y + 9z - 16 = 0$ , и нормали

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{-6} = \frac{z - 3}{9}.$$

### Задачи для самостоятельного решения

- 1.15.10** Дан закон движения материальной точки по оси  $OX$ :  $x(t) = 2t + t^3$ . Найдите её скорость и ускорение в момент времени  $t = 2$  с ( $x$  дается в сантиметрах,  $t$  — в секундах).
- 1.15.11** Радиус шара возрастает равномерно со скоростью 5 см/с. С какой скоростью растут площадь поверхности шара и объём шара в тот момент, когда его радиус равен 50 см?
- 1.15.12** Точка движется по гиперболе  $y = 10/x$  так, что её абсцисса растёт равномерно со скоростью 3 см/с. С какой скоростью изменяется её ордината, когда точка проходит положение  $(5, 2)$ ?
- 1.15.13** Составьте уравнения касательной и нормали к графику функций:  
а)  $y = 3x^4 - 5x^2 + 4$  в точке  $x_0 = -1$ ; б)  $y = 3x^2 + 4x + 5$  в точке  $x_0 = -2$ .
- 1.15.14** Составьте уравнения касательной и нормали к графику функции, заданной неявно следующими уравнениями:  
а)  $4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14 = 0$  в точке  $(-2, 3)$ ;  
б)  $x^3 + y^3 - 3xy = 3$  в точке  $(2, 1)$ .
- 1.15.15** Докажите, что уравнение касательной:  
а) к эллипсу  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  в точке  $(x_1, y_1)$  можно записать в виде  $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ ;  
б) к гиперболе  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  в точке  $(x_2, y_2)$  — в виде  $\frac{xx_2}{a^2} - \frac{yy_2}{b^2} = 1$ .
- 1.15.16** Составьте уравнение касательных к эллипсу  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$ , параллельных прямой  $3x + 2y + 7 = 0$ .
- 1.15.17** Составьте уравнение касательных к гиперболе  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ , перпендикулярных прямой  $4x + 3y - 7 = 0$ .
- 1.15.18** Найдите уравнение касательной и нормали кривой, заданной параметрически:

- а)  $\begin{cases} x = 3t - 5, \\ y = t^2 + 4 \end{cases}$  в точке, где  $t = 3$ ;
- б)  $\begin{cases} x = 2 \cos t + 3 \sin t, \\ y = \cos t + 2 \sin t \end{cases}$  в точке, где  $t = \frac{\pi}{2}$ .

**1.15.19** Запишите уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к пространственной кривой, заданной вектор-функцией скалярного аргумента:

- а)  $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 3)\mathbf{i} + (2t^2 - 1)\mathbf{j} + (3t^2 - 2)\mathbf{k}$  в точке, где  $t_0 = 1$ ;
- б)  $\mathbf{r}(t) = \sin 2t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$  в точке, где  $t_0 = \frac{\pi}{2}$ .

**1.15.20** Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением:

- а)  $z = 3x^2 + 2y^2 - 12$  в точке  $(2, -2, 8)$ ;
- б)  $z = x^2 - 2y^2 + 4xy + 6x - 1$  в точке  $(1, -2, -10)$ .

**1.15.21** Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением:

- а)  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$  в точке  $(1, -1, 1)$ ;
- б)  $x^2yz + 2x^2z - 3xyz + 8 = 0$  в точке  $(2, 0, -1)$ .

**1.15.22** К гиперboloиду  $6x^2 + 15y^2 - 10z^2 = 300$  проведена касательная плоскость, отсекающая на положительных координатных полуосях равные отрезки. Запишите её уравнение.

**1.15.23** К поверхности  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$  проведена касательная плоскость, параллельная плоскости  $x + 4y + 6z = 0$  и пересекающая положительные координатные полуоси. Запишите её уравнение.

## 1.16 Дифференциал

Рекомендуется изучить пп. 2.10, 2.11 и 2.12 учебного пособия.

Как мы уже отмечали, функция  $f: X \subset R_n \rightarrow Y \subset R_m$  называется дифференцируемой в точке  $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , если ее приращение при переходе из точки  $M_0$  в точку  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  может быть представлено в виде

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x), \quad (\text{a})$$

где  $A$  — матрица размера  $m \times n$  (производная матрица) линейного оператора.

$A: R_n \rightarrow R_m$ ,  $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)^T$  — вектор приращений ( $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ );

$\alpha(\Delta x)$  — бесконечно малая вектор-функция порядка выше первого относительно  $|\Delta x|$ , т.е.  $\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{|\alpha(\Delta x)|}{|\Delta x|} = 0$ . Матрицу  $A$  называют производной матрицей отображения  $f$ , а произведение  $A\Delta x$  называют дифференциалом функции  $f$  в точке  $M_0$  и обозначают  $df$ , при этом полагают  $\Delta x = dx = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)^T$ . Таким образом, дифференциал — это значение линейного оператора  $A$  для вектора приращений  $\Delta x$ .

Как следует из (а), дифференциал функции есть величина бесконечно малая при  $\Delta x \rightarrow 0$ , эквивалентная приращению  $\Delta f$ , если матрица  $A$  не нулевая.

В случае  $f: X \subset R \rightarrow Y \subset R$ , т. е. скалярной функции одного скалярного аргумента, имеем

$$df = f'(x_0)dx. \quad (б)$$

В случае  $f: X \subset R_n \rightarrow Y \subset R$ , т. е. скалярной функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  векторного аргумента, имеем

$$df = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n. \quad (в)$$

Для скалярной функции  $y = f(x)$  одного аргумента дифференциал равен приращению ординаты касательной к графику функции в точке  $x_0$  при переходе от точки  $x_0$  к  $x$ , а для функции  $z = z(x, y)$  — приращению аппликаты касательной плоскости при переходе из точки  $(x_0, y_0)$  в точку  $(x, y)$ .

Заметим, что дифференциал суммы, произведения и частного можно находить по формулам, подобным соответствующим формулам для производных, т. е.

$$d(u + v) = du + dv, \quad d(u \cdot v) = vdu + udv, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Последние две формулы имеют место лишь для скалярнозначных функций.

**1.16.1** Найдите дифференциал следующих функций:

$$f_1(x) = e^{x^2 \sin 5x}; \quad f_2(x) = \operatorname{tg} x^4.$$

*Решение.* Данные функции являются скалярными функциями одного скалярного аргумента. Поэтому по формуле (б) находим:

$$\begin{aligned} df_1 &= f'_1(x)dx = e^{x^2 \sin 5x} (2x \sin 5x + 5x^2 \cos 5x) dx; \\ df_2 &= f'_2(x)dx = \frac{1}{\cos^2 x^4} \cdot 4x^3 dx. \end{aligned}$$

**1.16.2** Найдите дифференциал следующих функций:

$$f_1(x, y) = x \sin y + y \sin x; \quad f_2(x, y, z) = xyz + y^2; \quad f_3(x, y) = x + y^{x/y}.$$

*Решение.* Данные функции являются скалярными функциями векторного аргумента, поэтому применяем формулу (в):

$$\begin{aligned} df_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy = (\sin y + y \cos x) dx + (x \cos y + \sin x) dy; \\ df_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy + \frac{\partial f_2}{\partial z} dz = yz dx + (xz + 2y) dy + xy dz; \\ df_3 &= \frac{\partial f_3}{\partial x} dx + \frac{\partial f_3}{\partial y} dy = \left( 1 + y^{(x/y)} \ln y \cdot \frac{1}{y} \right) dx + y^{(x/y)} \cdot \left( -\frac{x}{y^2} \ln y + \frac{x}{y^2} \right) dy. \end{aligned}$$

Заметим, что при фиксированном  $y$  функция  $y^{(x/y)}$  показательная, а при фиксированном  $x$  — степенно-показательная:  $y^{(x/y)} = e^{(x/y) \cdot \ln y}$ .

Найденные дифференциалы функций  $f_1, f_2, f_3$  иногда называют полными. Они находятся при условии, что изменяются все аргументы. Дифференциал, вычисленный при условии, что изменяется только один аргумент, а остальные — константы, называют частным и обозначают  $d_{x_1}f, d_{x_2}f, \dots, d_{x_n}f$ . Например,  $d_{x_1}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1$ . Величина  $d_{x_1}f$  есть дифференциал функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , найденный при условии, что изменяется только аргумент  $x_1$ , а остальные постоянны. Из решения задачи 19.2 следует, что  $d_x f_1 = (\sin y + y \cos x)dx$ ,  $d_y f_1 = (x \cdot \cos y + \sin x)dy$ .

Чтобы найти дифференциал векторной функции скалярного или векторного аргумента, нужно найти дифференциалы их координатных функций, так как если

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \text{ то } df = \begin{bmatrix} df_1 \\ df_2 \\ \vdots \\ df_n \end{bmatrix}.$$

**1.16.3** Найдите дифференциал следующих функций:

$$f_1(t) = \begin{bmatrix} \sin t^2 \\ \cos t^2 \\ t^2 \end{bmatrix}; \quad f_2(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{x}{y^2} \\ \frac{y}{x^2} \end{bmatrix}.$$

*Решение.* По правилу отыскания дифференциала векторных функций находим

$$df_1(t) = \begin{bmatrix} d(\sin t^2) \\ d(\cos t^2) \\ d(t^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \cos t^2 dt \\ -2t \sin t^2 dt \\ 2t dt \end{bmatrix};$$

$$df_2(x, y) = \begin{bmatrix} d\left(\frac{x}{y^2}\right) \\ d\left(\frac{y}{x^2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{y^2}dx - \frac{2x}{y^3}dy \\ -\frac{2y}{x^3}dx + \frac{1}{x^2}dy \end{bmatrix}.$$

**1.16.4** Дано: функция  $f(x) = x^2 + 2$ ;  $x_0 = 1,0000$ ;  $x_1 = 1,0200$ . Вычислите дифференциал и приращение функции при переходе из точки  $x_0$  в  $x_1$ . Оцените абсолютную и относительную погрешность, допускаемую при замене приращения функции дифференциалом.

*Решение.*  $df = f'(x_0)dx = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)(x_1 - x_0)$ .

В нашем примере  $f'(x) = 2x$ ,  $f'(x_0) = f'(1) = 2,0000$ ;

$x_1 - x_0 = 1,0200 - 1,0000 = 0,0200$ , поэтому  $df = 2 \cdot 0,0200 = 0,0400$ ;

$$\Delta f = f(x_1) - f(x_0) = (1,0200)^2 + 2,0000 - (1,0000^2 + 2,0000) = 0,0404.$$

Как видим,  $|\Delta f - df| = 0,0004$ , т. е. абсолютная погрешность при замене приращения функции дифференциалом в данном случае составила 0,0004, а относительная

погрешность равна  $\left| \frac{\Delta f - df}{\Delta f} \right| = \frac{0,0004}{0,0404} \approx 0,0099$ , что составляет примерно 1%.

В приближенных вычислениях иногда используют прием замены приращения функции дифференциалом.

**1.16.5** Заменяя приращение функции её дифференциалом, вычислите приближенно  $(1,0300)^5$ . Оцените абсолютную и относительную погрешность, допускаемую при этом.

*Решение.* Примем  $f(x) = x^5$ ,  $x_0 = 1,0000$ ,  $x_1 = 1,0300$ ,  $\Delta x = 1,0300 - 1,0000 = 0,0300$ . Можем записать

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= \Delta f(x_0), \\ f(x_0 + \Delta x) &= f(x_0) + \Delta f(x_0) \approx f(x_0) + df(x_0). \end{aligned}$$

В нашей задаче

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(1,0000) = 1,0000, \\ f(x_0 + \Delta x) &= (1,0300)^5, \\ \Delta f(x_0) \approx df(x_0) &= 5x_0^4 \Delta x = 5 \cdot 1,0000^4 \cdot 0,0300 = 0,1500. \end{aligned}$$

Поэтому  $(1,0300)^5 \approx 1,0000 + 0,1500 = 1,1500$ .

Точное вычисление дает  $(1,0300)^5 = 1,1592740743 \approx 1,1593$ , т. е. допущена абсолютная погрешность  $\Delta = |1,1500 - 1,1593| \approx 0,0093$ , а относительная  $\delta = \frac{0,0093}{1,1593} \approx 0,008$ , т. е. менее одного процента.

**1.16.6** Даны функция  $z(x, y) = 2x^2 - 3xy - 4y^2$  и точки  $M_0(2,00; -3,00)$  и  $M_1(2,01; -2,97)$ . Вычислите  $\Delta z$  и  $dz$  при переходе из точки  $M_0$  в  $M_1$ . Вычислите приближенно, заменяя  $\Delta z$  величиной  $dz$ , значение  $f(M_1)$ . Укажите абсолютную и относительную погрешность, допускаемую при этом.

*Решение.* Находим:

$$\begin{aligned} \Delta z &= z(M_1) - z(M_0), \\ z(M_1) &= 2 \cdot (2,01)^2 - 3 \cdot 2,01(-2,97) - 4(-2,97)^2 = 8,08 + 17,91 - 35,28 = -9,29, \\ z(M_0) &= 8,00 + 18,00 - 36,00 = -10,00, \quad \Delta z = -9,29 - (-10,00) = 0,71. \end{aligned}$$

По формуле (в) находим:

$$\begin{aligned} dz(x_0, y_0, dx, dy) &= \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)dy, \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= 4x - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = 8,00 + 9,00 = 17,00, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -3x - 8y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = -6,00 + 24,00 = 18,00, \\ \Delta x &= 2,01 - 2,00 = 0,01 = dx, \quad \Delta y = -2,97 - (-3,00) = 0,03 = dy, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} dz(M_0) &= \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)dy = 17,00 \cdot 0,01 + 18,00 \cdot 0,03 = 0,17 + 0,54 = 0,71, \\ z(M_1) &\approx z(M_0) + df = -10,00 + 0,71 = -9,29. \end{aligned}$$

Как видим, с точностью до сотых величины  $dz$  и  $\Delta z$  совпали между собой. Они могут отличаться лишь в тысячных долях.

Итак, дифференциал — это линейная относительно  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  функция. При малых  $\Delta x_i$  дифференциал мало отличается от приращения функции.

Дифференциал обладает свойством инвариантности формы записи, заключающемся в следующем: дифференциал функции  $y = f(x)$  записывается в виде  $dy = f'(x)dx$  как в случае, когда  $x$  — независимая переменная, так и в случае, когда  $x$  является функцией одного или нескольких аргументов; дифференциал функции  $f(x, y)$  записывается в форме  $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$  независимо от того, являются ли  $x$  и  $y$  независимыми переменными или сами являются функциями одного или многих аргументов.

**1.16.7** Найдите дифференциал следующих функций:

а)  $z = f_1(t)$ ,  $t = x^3$ ; б)  $z = f_2(t)$ ,  $t = xy^2 + x^2y$ ;

в)  $z = f_3(u, v)$ ,  $u = x^2$ ,  $v = x^3$ ;

г)  $z = f_4(u, v)$ ,  $u = x^2 + y^2$ ,  $v = x^2 - y^2$ ,

где  $f_1, f_2, f_3, f_4$  — любые дифференцируемые функции.

*Решение.* Во всех четырёх функциях аргументы  $t, u, v$  не являются независимыми. При отыскании дифференциалов будем использовать свойство инвариантности формы его записи:

а)  $df_1 = f'_1(t)dt = f'_1(t) \cdot 3x^2dx$ ;

б)  $df_2 = f'_2(t)dt = f'_2(t)[(y^2 + 2xy)dx + (2xy + x^2)dy]$ ;

в)  $df_3 = \frac{\partial f_3}{\partial u}(u, v)du + \frac{\partial f_3}{\partial v}(u, v)dv = \frac{\partial f_3}{\partial u} \cdot 2xdx + \frac{\partial f_3}{\partial v} \cdot 3x^2dx =$   
 $= \left( \frac{\partial f_3}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f_3}{\partial v} \cdot 3x^2 \right) dx$ ;

г)  $df_4 = \frac{\partial f_4}{\partial u}(u, v)du + \frac{\partial f_4}{\partial v}(u, v)dv = \frac{\partial f_4}{\partial u} \cdot (2xdx + 2ydy) + \frac{\partial f_4}{\partial v} \cdot (2xdx - 2ydy) =$   
 $= \left( \frac{\partial f_4}{\partial u} + \frac{\partial f_4}{\partial v} \right) \cdot 2xdx + \left( \frac{\partial f_4}{\partial u} - \frac{\partial f_4}{\partial v} \right) \cdot 2ydy$ .

Дифференциал является функцией точки и приращений аргументов. Приращение аргументов будем полагать в заданном процессе постоянными и не зависящими от выбора точки. При таком соглашении дифференциал является функцией от тех же аргументов, что и исходная функция, т. е. если  $z = f(x, y)$ , то  $dz = \varphi(x, y)$ . Можно найти дифференциал от дифференциала  $d(dz) = d\varphi(x, y)$ . Его обозначают  $d(dz) = d^2z$  и называют вторым дифференциалом или дифференциалом второго порядка. В этой схеме дифференциал  $dz$  называют первым дифференциалом. Аналогично можно ввести понятие дифференциала любого порядка:  $d(d^2z) = d^3z$  — третий дифференциал, ...,  $d(d^{(n-1)}z) = d^{(n)}z$  — дифференциал порядка  $n$ . Для скалярной функции  $y = f(x)$  одного скалярного аргумента  $x$  легко находим (учитывая соглашение о независимости  $dx$  от  $x$ )

$$d^2f = d(f'(x)dx) = f''(x)(dx)^2, \quad d^3f = f'''(x)(dx)^3, \quad \dots, \quad d^nf = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Подчеркнём ещё раз, что в этих соотношениях  $x$  — независимая переменная. Если же  $x = x(t)$ , т. е.  $x$  является функцией другого аргумента, то  $d(dx) \neq 0$  и записанные выражения для дифференциалов несправедливы. В этом случае  $d^2f = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x$ . Видим, что дифференциалы высших порядков, начиная со второго, свойством инвариантности формы записи не обладают.

Для функции  $z = f(x, y)$ , если  $x$  и  $y$  — независимые переменные, легко находим:

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy, \\ d^2z &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (dy)^2, \\ d^3z &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} (dx)^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} (dx)^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} dx (dy)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} (dy)^3 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

**1.16.8** Найдите дифференциал указанного порядка от следующих функций:

а)  $y = x^5$ ,  $d^5y$ ; б)  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $d^4y$ ; в)  $y = xe^{2x}$ ,  $d^{10}y$ .

*Решение.* а)  $y^{(5)} = (x^5)^{(5)} = 120$ ,  $d^5y = 120(dx)^5$ ;

б)  $y = x^{-1/2}$ ,  $y' = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$ ,  $y'' = \frac{3}{4}x^{-5/2}$ ,  $y''' = -\frac{15}{8}x^{-7/2}$ ,

$y^{(4)} = \frac{105}{16}x^{-9/2}$ ,  $d^4y = \frac{105}{16} \frac{1}{x^4 \sqrt{x}} (dx)^4$ ;

в) применяя формулу Лейбница, находим:

$$(x \cdot e^{2x})^{(10)} = x(e^{2x})^{(10)} + 10 \cdot (e^{2x})^{(9)} = 2^{10} \cdot xe^{2x} + 10 \cdot 2^9 e^{2x},$$

поэтому  $d^{10}y = 2^9 e^{2x} (2x + 10)(dx)^{10}$ .

**1.16.9** Найдите дифференциал второго порядка от следующих функций:

а)  $z = y \ln x$ ; б)  $z = e^{xy}$ .

*Решение.* а) находим частные производные второго порядка от функции

$z = y \ln x$ :  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y}{x^2}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \ln x$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x}$ , поэтому

$$d^2z = -\frac{y}{x^2} (dx)^2 + \frac{2}{x} dx dy;$$

б) поскольку  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (xy + 1)e^{xy}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}$ , то

$$d^2z = [y^2 (dx)^2 + 2(xy + 1) dx dy + x^2 (dy)^2] e^{xy}.$$

Во всех предыдущих примерах мы искали дифференциал явно заданных функций. В случае неявно заданных функций или заданных параметрически меняется лишь правило отыскания производных.

**1.16.10** Найдите  $dy$  и  $d^2y$ , если функция  $y(x)$  задана неявно уравнением  $e^y - x - y = 0$ .



*Решение.* По правилу отыскания производных от неявно заданных функций (см. п. 2.7 учебного пособия) находим

$$y'_x = -\frac{-1}{e^y - 1}, \quad y'' = -\frac{e^y \cdot y'_x}{(e^y - 1)^2} = -\frac{e^y \cdot \frac{1}{e^y - 1}}{(e^y - 1)^2} = -\frac{e^y}{(e^y - 1)^3}.$$

Поэтому  $dy = \frac{dx}{e^y - 1}$ ,  $d^2y = \frac{-e^y}{(e^y - 1)^3}(dx)^2$ .

Так как  $e^y = x + y$ , то  $dy = \frac{dx}{x + y - 1}$ ,  $d^2y = -\frac{(x + y)}{(x + y - 1)^3}(dx)^2$ .

Можно поступить и по-другому. Найдем дифференциал от обеих частей тождества  $e^y - x - y = 0$ :  $e^y dy - dx - dy = 0$ , отсюда  $dy = \frac{dx}{e^y - 1}$ .

Дифференцируя еще раз, получаем  $e^y(dy)^2 + e^y d^2y - d^2y = 0$ , отсюда

$$d^2y = \frac{-e^y(dy)^2}{e^y - 1} = \frac{-e^y(dx)^2}{(e^y - 1)^3}.$$

**1.16.11** Найдите  $dz$  и  $d^2z$ , если функция  $z(x, y)$  задана неявно уравнением  $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3z - 2y + x + 1 = 0$ .

*Решение.* Возьмем дифференциал от обеих частей тождества  $x^3 + 2y^3 + [z(x, y)]^3 - 3z(x, y) - 2y + x + 1 = 0$ :

$$3x^2 dx + 6y^2 dy + 3z^2 dz - 3dz - 2dy + dx = 0 \quad (*)$$

или  $(3x^2 + 1)dx + (6y^2 - 2)dy + (3z^2 - 3)dz = 0$ . Отсюда

$$dz = \frac{(3x^2 + 1)}{3 - 3z^2} dx + \frac{(6y^2 - 2)}{3 - 3z^2} dy.$$

Чтобы найти  $d^2z$ , возьмём дифференциал от обеих частей тождества (\*):

$$6x(dx)^2 + 12y(dy)^2 + 6z(dz)^2 + (3z^2 - 3)d^2z = 0. \quad (**)$$

Отсюда  $d^2z = \frac{6x(dx)^2 + 12y(dy)^2 + 6z^2(dz)^2}{3 - 3z^2}$ .

Если внести сюда ранее найденное значение  $dz$ , то получим окончательный ответ. Подчеркнём, что соотношения (\*) и (\*\*) — тождества относительно  $x$  и  $y$ , но уравнения относительно других переменных.

### Задачи для самостоятельного решения

**1.16.12** Найдите дифференциал функции  $y(x)$ , если:

а)  $y = \frac{1}{x^2}$ ; б)  $y = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|$ ; в)  $y = \arcsin \frac{x}{a}$ ,  $a \neq 0$ .

**1.16.13** Найдите дифференциал функции, если:

а)  $u = \frac{x}{y}$ ; б)  $u = x^y$ ; в)  $u = xy + yz + zx$ .

**1.16.14** Найдите дифференциалы следующих функций:

$$\text{а) } f(x) = \begin{bmatrix} e^{x^2} \\ \sin^2 x \\ \cos^2 x \end{bmatrix}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ x^2 \\ \frac{1}{y^2} \end{bmatrix}.$$

**1.16.15** Вычислите дифференциал и приращение функции при переходе из точки  $x_0$  в точку  $x_1$ . Оцените абсолютную и относительную погрешность замены приращения дифференциалом в следующих случаях:

а)  $y = 2x^2 + 4x + 1$ ,  $x_0 = 3,0000$ ,  $x_1 = 3,0400$ ;

б)  $y = 5x^3 - x^2 + 3$ ,  $x_0 = 1,0000$ ,  $x_1 = 1,0100$ .

**1.16.16** Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите, округлив до 0,0001:

а)  $\sqrt{4,0120}$ ; б)  $\sqrt[3]{0,9843}$ .

**1.16.17** Найдите приращение функции и её дифференциал при переходе из точки  $M_0(x_0, y_0)$  в точку  $M_1(x_1, y_1)$ , оцените абсолютную и относительную погрешность замены приращения функции дифференциалом в следующих случаях:

а)  $z = x^3 y^2$ ,  $M_0(2, 1)$ ,  $M_1(1,9900; 1,0200)$ ;

б)  $z = 3x^2 + xy - y^2 + 1$ ,  $M_0(1, 2)$ ,  $M_1(1,0100; 2,0200)$ .

**1.16.18** Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислите:

а)  $1,002 \cdot (2,003)^2 + (3,004)^3$ ; б)  $\sqrt{(1,020)^3 + (1,970)^3}$ .

**1.16.19** Применяя свойство инвариантности формы записи первого дифференциала, найдите дифференциалы следующих функций:

а)  $z = f_1(t)$ ,  $t = \sin x$ ;

б)  $z = f_2(t)$ ,  $t = x \sin y + y \cos x$ ;

в)  $z = f_3(u, v)$ ,  $u = \frac{1}{x}$ ,  $v = \frac{1}{x^2}$ ;

г)  $z = f_4(u, v)$ ,  $u = x \cdot y$ ,  $v = x/y$ .

**1.16.20** Найдите дифференциалы указанного порядка от следующих функций:

а)  $y = x \ln x$ ,  $d^3 y$ ;

б)  $y = \frac{x^2}{x-1}$ ,  $d^4 y$ ; в)  $y = x \cos 2x$ ,  $d^{10} y$ .

**1.16.21** Найдите дифференциалы второго порядка от следующих функций:

а)  $z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ; б)  $u(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2}$ ;

в)  $z(x, y) = \frac{x}{y}$ ; г)  $u(x, y) = (x^3 + y^3) - 3xy(x - y)$ .

**1.16.22** Найдите дифференциалы второго порядка от следующих функций:

а)  $z = f(t)$ ,  $t = \sin^2 x$ ; б)  $u = f(t)$ ,  $t = \frac{y}{x}$ ;

$$\text{в) } z = f(u, v), \quad u = ax, \quad v = bx;$$

$$\text{г) } z = f(u, v), \quad u = x + y, \quad v = 2x - y.$$

**1.16.23** Найдите  $dy$  и  $d^2y$ , если функция  $y(x)$  задана неявно уравнениями:

$$\text{а) } x^2 + 2xy - y^2 = a^2; \quad \text{б) } y - 2x \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0.$$

**1.16.24** Найдите  $dz$  и  $d^2z$ , если функция  $z(x, y)$  задана неявно уравнениями:

$$\text{а) } xyz = x + y + z; \quad \text{б) } \frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1.$$

## 1.17 Экстремумы. Наибольшие и наименьшие значения функции

В подразделах 2.16.1 и 2.16.2 учебного пособия приведены необходимые и достаточные условия экстремума, которые рекомендуется изучить.

**1.17.1** Пользуясь первой производной, найдите экстремумы функций:

$$\text{а) } f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2; \quad \text{б) } f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12;$$

$$\text{в) } f(x) = x^{2/3} - (x^2 - 1)^{1/3}.$$

*Решение.* а) так как функция  $f(x)$  дифференцируема всюду, то экстремум возможен только в стационарных точках. Находим их, приравнявая нулю производную:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2 = 0.$$

Стационарная точка единственна:  $x_0 = 1$ . При переходе через точку  $x_0 = 1$  производная знака не меняет. По достаточному признаку, связанному с первой производной, в точке  $x_0 = 1$  экстремума нет;

$$\text{б) } f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 4(x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Видим, что точки  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$  являются стационарными.

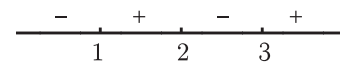


Рис. 1.1

Применяя метод интервалов, получаем, что на  $(-\infty, 1)$  функция убывает, а на  $(1, 2)$  — возрастает. При переходе через точку  $x_1 = 1$  (рис. 1.1) производная меняет знак по схеме  $(-, +)$ , следовательно, в точке  $x_1 = 1$  имеется минимум. При переходе через точку  $x_2 = 2$  производная меняет знак по схеме  $(+, -)$ , т. е. в точке  $x_2 = 2$  — максимум. В точке  $x_3 = 3$  — минимум, так как смена знака происходит по схеме  $(-, +)$ ;

$$\text{в) } f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} - \frac{1}{3}(x^2 - 1)^{-2/3}2x = \frac{2}{3} \frac{[(x^2 - 1)^{2/3} - x^{4/3}]}{x^{1/3}(x^2 - 1)^{2/3}}.$$

Находим стационарные точки из условия  $f'(x) = 0$ , следовательно,  $(x^2 - 1)^{2/3} = x^{4/3}$ , или  $(x^2 - 1)^2 = x^4$ ,  $x^4 - 2x^2 + 1 = x^4$ , откуда  $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,

$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Кроме того, в точках  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = -1$

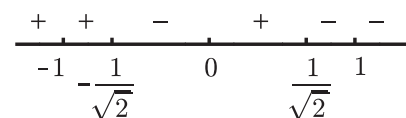


Рис. 1.2

и  $x_5 = 1$  производная не существует. Таким образом, имеем пять точек, «подозри-

тельных» на экстремум:  $-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1$ . Поведение знаков производной при переходе через эти точки изображено на рисунке 1.2. В точках  $x_{4,5} = \pm 1$  нет экстремума, в точках  $x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  — максимум, а в точке  $x_3 = 0$  — минимум.

**1.17.2** Пользуясь производными высших порядков, исследуйте на экстремум следующие функции:

а)  $f(x) = x^2 e^{-x}$ ; б)  $f(x) = e^x + e^{-x} + 2 \cos x$ .

*Решение.*

а)  $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$ .

Из условия  $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x} = 0$  находим две стационарные точки:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ . Находим вторую производную

$$f''(x) = (2 - 2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x} = (2 - 2x - 2x + x^2)e^{-x} = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}.$$

Так как  $f''(0) = 2 > 0$ , то в точке  $x_1 = 0$  — минимум,

а так как  $f''(2) = (4 - 8 + 2)e^{-2} = -2e^{-2} < 0$ , то в точке  $x_2 = 2$  — максимум;

б) находим  $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2 \sin x$ . Единственной стационарной точкой, что легко доказать, является точка  $x = 0$ .

Вычисляем старшие производные:

$$f''(x) = e^x + e^{-x} - 2 \cos x, \quad f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = e^x - e^{-x} + 2 \sin x, \quad f'''(0) = 0,$$

$$f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x} + 2 \cos x, \quad f^{(4)}(0) = 4 \neq 0, \quad f^{(4)}(0) > 0.$$

Так как первой не обратилась в нуль производная четного порядка, то в точке  $x = 0$  имеется экстремум, а поскольку  $f^{(4)}(0) > 0$ , то в точке  $x = 0$  — минимум.

**1.17.3** Найдите экстремумы функций:

а)  $z(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ ; б)  $z(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$ .

*Решение.* а) функция  $z(x, y)$  имеет непрерывные частные производные любого порядка на всей плоскости, поэтому применимы достаточные условия экстремума (см. п. 1.16.2 учебного пособия). Стационарные точки находим из условия  $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ . В результате получаем систему

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0, \\ xy - 2 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем четыре стационарные точки:  $M_1(-2, -1)$ ,  $M_2(-1, -2)$ ,  $M_3(1, 2)$ ,  $M_4(2, 1)$ . Находим вторые частные производные:  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$ .

Для  $M_1(-2, -1)$ :

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_1) = -12, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_1) = -6,$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_1) = -12, AC - B^2 = 144 - 36 > 0.$$

Так как  $A < 0$ ,  $AC - B^2 > 0$ , то в точке  $M_1$  — максимум.

Для  $M_2(-1, -2)$ :

$$A = -6, B = -12, C = -6, AC - B^2 = 36 - 144 < 0.$$

В точке  $M_2$  экстремума нет.

Для  $M_3(1, 2)$ :

$$A = 6, B = 12, C = 6, AC - B^2 = 36 - 144 < 0.$$

В точке  $M_3$  экстремума нет.

Для  $M_4(2, 1)$ :

$$A = 12, B = 6, C = 12, AC - B^2 = 144 - 36 > 0.$$

Так как  $A > 0$ ,  $AC - B^2 > 0$ , то в точке  $M_4$  имеем минимум;

$$\text{б) в данном случае } \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -4xy + 4y^3 - 5y^4.$$

Стационарные точки находим, решая систему

$$\begin{cases} x - y^2 = 0, \\ -4xy + 4y^3 - 5y^4 = 0. \end{cases}$$

Имеем единственную стационарную точку  $O(0, 0)$ . Для её исследования находим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4x + 12y^2 - 20y^3, \quad A = 2, \quad B = C = 0; \quad AC - B^2 = 0.$$

О существовании экстремума из этих соотношений никакого вывода сделать нельзя. При этих условиях  $d^2f(0, 0) = 2(\Delta x)^2$ , а поэтому  $d^2f(0, 0) = 0$  для любого вектора приращений вида  $(0, \Delta y)$ .

Найдём приращение функции  $z(x, y)$  при переходе из точки  $(0, 0)$  в точку  $(0 + \Delta x, 0 + \Delta y)$ .

$$\begin{aligned} \Delta z = f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) &= (\Delta x)^2 - 2\Delta x(\Delta y)^2 + (\Delta y)^4 - (\Delta y)^5 - 0 = \\ &= [\Delta x - (\Delta y)^2]^2 - (\Delta y)^5. \end{aligned}$$

Положим  $\Delta x = (\Delta y)^2$ ,  $\Delta y > 0$ , получим  $\Delta z = -(\Delta y)^5 < 0$ . Положим  $\Delta y = 0$ ,  $\Delta x \neq 0$ , получим  $\Delta z = (\Delta x)^2 > 0$ . Таким образом, приращение  $\Delta z$  для различных векторов приращений имеет разные знаки, следовательно, в точке  $(0, 0)$  экстремума нет;

Часто встречаются задачи отыскания экстремума функции  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , когда независимые переменные связаны некоторыми соотношениями (связями)

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \Phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \Phi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad m < n. \end{cases}$$

Такие экстремумы называют условными. Если данные соотношения удаётся разрешить относительно  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , то задача на условный экстремум сводится к задаче на безусловный экстремум некоторой функции  $v = \Psi(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)$ . Если это сделать затруднительно, то применяют метод Лагранжа, заключающийся в следующем. Вводят вспомогательную функцию

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 + \dots + \lambda_m \Phi_m.$$

Точки, в которых возможен условный экстремум, находят из системы

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0, \quad \Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \dots, \Phi_m = 0.$$

Исследуя знак  $d^2F$  в этих точках, выясняют, действительно ли имеется экстремум.

**1.17.4** Следующие функции исследуйте на условный экстремум:

а)  $z(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ , если  $x + y = 3$ ;

б)  $z(x, y) = 3 - 2x - 4y$ , если  $x^2 + y^2 = 5$ .

*Решение.*

а) находим  $y = 3 - x$ . Функция  $z(x, y)$  превращается в функцию одного переменного

$$\begin{aligned} z &= f(x) = z(x, 3 - x) = x^2 + (3 - x)^2 - x(3 - x) + x + 3 - x = \\ &= x^2 + 9 - 6x + x^2 - 3x + x^2 + 3 = 3x^2 - 9x + 12. \end{aligned}$$

Полученную функцию  $f(x) = 3x^2 - 9x + 12$  исследуем на экстремум. Находим стационарные точки:

$$f'(x) = 6x - 9, \quad x_0 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}; \quad f''(x) = 6 > 0,$$

следовательно, в точке  $x_0 = \frac{3}{2}$  функция  $f(x)$  имеет минимум. Так как  $y_0 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ , то точка  $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$  является точкой условного минимума;

б) составляем функцию  $F(x, y, z) = 3 - 2x - 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$ , находим:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2 + 2\lambda x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -4 + 2\lambda y, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 5.$$

Для отыскания точек, «подозрительных» на условный экстремум, получаем систему

$$\begin{cases} -1 + \lambda x = 0, \\ -2 + \lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 5, \end{cases} \quad \text{решая которую, находим } \lambda_1 = 1, x_1 = 1, y_1 = 2; \lambda_2 = -1, x_2 = -1,$$

$y_2 = -2$ .

Так как  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda$ , то  $d^2F = 2\lambda[(dx)^2 + (dy)^2]$ .

Если  $\lambda = \lambda_1 = 1$ , то  $d^2F > 0$  и в точке  $M_1(1, 2)$  имеется условный минимум, равный  $3 - 2 - 8 = -7$ . Если же  $\lambda = \lambda_2 = -1$ , то  $d^2F < 0$  и в точке  $M_2(-1, -2)$  функция  $z(x, y)$  имеет условный максимум, равный  $3 + 2 + 8 = 13$ .

По теореме Вейерштрасса всякая непрерывная на замкнутом множестве  $D$  функция достигает своего наибольшего и наименьшего значения. Соответствующие точки могут быть либо внутренними, либо граничными множества  $D$ . Для их отыскания можно применять такую схему: найти все точки, «подозрительные» на экстремум внутри множества  $D$ , и на его границе, вычислить значения во всех найденных точках и из них выбрать наибольшее и наименьшее. Как видим, исследовать функцию на экстремум в этом случае не требуется.

**1.17.5** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$  на  $[-1, 3]$ .

*Решение.* Находим критические точки данной функции, приравнявая нулю её производную  $y' = \frac{2(2x - 2)}{3\sqrt[3]{x^2 - 2x}}$ . В точке  $x_1 = 1$  производная равна нулю, в точках  $x_2 = 2$  и  $x_3 = 0$  производная не существует. Все эти точки внутренние отрезка  $[-1, 3]$ . Точки  $x_4 = -1$  и  $x_5 = 3$  являются граничными. Вычисляем значение функции во всех найденных точках:  $y(x_1) = y(1) = 1$ ,  $y(x_2) = y(2) = 0$ ,  $y(x_3) = y(0) = 0$ ,  $y(x_4) = y(-1) = \sqrt[3]{9}$ ,  $y(x_5) = y(3) = \sqrt[3]{9}$ . Видим, что наименьшее значение  $m = 0$ , оно достигается в точках  $x_2 = 2$  и  $x_3 = 0$ , а наибольшее —  $M = \sqrt[3]{9}$ . Оно достигается в граничных точках  $x_4 = -1$  и  $x_5 = 3$ .

**1.17.6** Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какова должна быть высота воронки, чтобы объём её был наибольшим?

*Решение.* Будем считать нижнее основание воронки пренебрежимо малым по сравнению с верхним. Тогда форма воронки — конус. Обозначим  $x = |\mathbf{OA}|$  — высоту воронки (рис. 1.3). Тогда  $R = |\mathbf{OB}| = \sqrt{(AB)^2 - x^2}$ . По условию  $|\mathbf{AB}| = 20$  см. Поэтому  $R = \sqrt{400 - x^2}$  и  $0 \leq x \leq 20$ , отрицательные значения  $x$  не имеют физического смысла. Находим наибольшее значение функции:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot x(400 - x^2) \text{ на } [0, 20];$$

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi(400 - x^2 - 2x^2) = \frac{1}{3}\pi(400 - 3x^2).$$

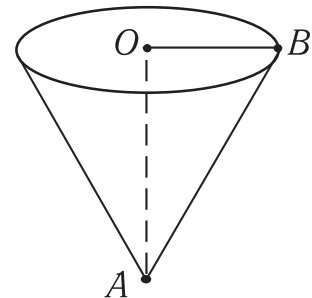


Рис. 1.3

Из условия  $V'(x) = 0$  получаем  $x = \pm \frac{20}{\sqrt{3}} = \pm \frac{20\sqrt{3}}{3}$ , отрицательное значение не принадлежит  $[0, 20]$ . Поэтому  $x = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ . При этом значении  $x$  объём  $V$  будет наибольшим, так как наименьшее значение  $V = 0$  достигается при  $x = 0$  и  $x = 20$ . Итак, при высоте  $H = \frac{20\sqrt{3}}{3}$  объём воронки будет наибольшим.

**1.17.7** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$z(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$  в треугольнике, ограниченном прямыми  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 3$  (область  $D$  на рис. 1.4).

Решение. Находим стационарные точки из системы 
$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y - 6 = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -4y + 4x = 0. \end{cases}$$

Получаем единственную точку  $M_1(1, 1)$ . Она лежит внутри области  $D$ .

$$z(M_1) = z(1, 1) = 1 - 2 + 4 - 6 - 1 = -4.$$

Вычислим также значение функции  $z(x, y)$  в точках  $A, B, O$ :

$$z(0, 0) = -1, \quad z(3, 0) = 9 - 18 - 1 = -10, \quad z(0, 3) = -18 - 1 = -19.$$

На прямой  $x + y = 3$  имеем:

$$\begin{aligned} z(x, y) &= z(x, 3 - x) = x^2 - 2(3 - x)^2 + 4x(3 - x) - 6x - 1 = \\ &= x^2 - 18 + 12x - 2x^2 + 12x - 4x^2 - 6x - 1 = -5x^2 + 18x - 19 = 0. \end{aligned}$$

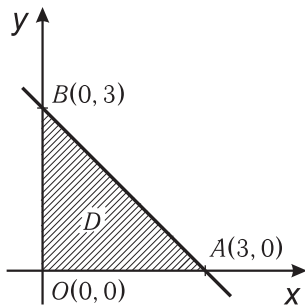


Рис. 1.4

Получили функцию от одного аргумента  $f_1(x) = -5x^2 + 18x - 19$ . Ищем её критические точки на  $[0, 3]$ :  $f_1'(x) = -10x + 18$ ,  $x = \frac{9}{5}$ ,  $\frac{9}{5} \in [0, 3]$ ,  $f_1\left(\frac{9}{5}\right) = -\frac{81}{5} + \frac{90}{5} - 19 = -\frac{86}{5}$ . При  $x = 0$  и  $x = 3$  приходим к точкам  $O(0, 0)$  и  $A(3, 0)$ . На границе  $OB$  получаем  $z(0, y) = -2y^2 - 1 = 0 = f_2(y)$ .

Получили функцию  $f_2(y) = -2y^2 - 1$ . Ищем её наибольшее и наименьшее значения на  $[0, 3]$ :  $f_2'(y) = -4y = 0$ ,  $y = 0$ , опять получили точку  $(0, 0)$ . При  $y = 0$  и  $y = 3$  получаем уже учтенные точки  $O(0, 0)$  и  $B(0, 3)$ . На границе  $OA$  имеем функцию  $z(x, 0) = f_3(x) = x^2 - 6x - 1$ . Ищем её наибольшее и наименьшее значения на  $[0, 3]$ :  $f_3'(x) = 2x - 6$ ,  $x = 3$ , опять получили точку  $A(3, 0)$ . При  $x = 0$  получаем точку  $(0, 0)$ .

Итак, мы нашли следующие значения функции:  $-4, -1, -19, -\frac{86}{5}$ . Сравнивая их, видим, что наибольшее значение функции в данной области равно  $-1$ , оно достигается в точке  $O(0, 0)$ , а наименьшее равно  $-19$ , оно достигается в точке  $B(0, 3)$ .

Для исследования поведения функции на границе области можно применять приемы отыскания условного экстремума.

**1.17.8** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = 2xy$  в области  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

Решение.  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2y$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x$ . Находим из условия равенства нулю частных производных единственную стационарную точку  $M_0(0, 0)$ , расположенную внутри круга  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $z(0, 0) = 0$ . Для отыскания наибольшего и наименьшего значений на окружности  $x^2 + y^2 = 1$  поступим так же, как в задачах на условный экстремум. Составим функцию Лагранжа  $F(x, y, \lambda) = 2xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$  и найдем точки, в которых возможны наибольшее и наименьшее значения. Из системы



$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2y + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 2\lambda y = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Получаем 4 точки:  $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ,  $M_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ,  $M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ,

$M_4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ . При этом  $z(M_1) = z(M_4) = 1$ ,  $z(M_2) = z(M_3) = -1$ . Сравнивая значения функции в этих критических точках, видим, что наименьшее значение функции достигается в точках  $M_2$  и  $M_3$  и равно  $-1$ , а наибольшее значение достигается в точках  $M_1$  и  $M_4$  и равно  $1$ .

**1.17.9** При каких размерах открытая прямоугольная ванна данной вместимости  $V$  имеет наименьшую поверхность?

*Решение.* Размеры основания ванны обозначим через  $x$  и  $y$ , а высоту — через  $z$ . Тогда полная поверхность  $S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ . По условию задачи требуется найти наименьшее значение функции  $S(x, y, z)$  при условии, что  $x \cdot y \cdot z = V$  ( $V$  задано). По смыслу задачи  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$ . Составляем функцию Лагранжа  $F(x, y, z, \lambda) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - V)$ . Получаем систему

$$\begin{cases} F'_x = y + 2z + \lambda yz = 0, \\ F'_y = x + 2z + \lambda xz = 0, \\ F'_\lambda = xyz - V = 0, \\ xyz = V, \end{cases}$$

решая которую, находим единственную критическую точку  $x = y = 2\sqrt[3]{\frac{V}{4}}$ ,  $z = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$ .

При этих размерах поверхность ванны будет наименьшей. Доказательство предоставляем читателю.

### Задачи для самостоятельного решения

**1.17.10** Пользуясь первой производной, найдите точки экстремума следующих функций:

а)  $f(x) = x - \ln(1 + x^2)$ ; б)  $f(x) = x^2\sqrt[3]{6x - 7}$ ;

в)  $f(x) = x^{2/3} + x^{5/3}$ ; г)  $f(x) = (x - 5)^2\sqrt[3]{(x + 1)^2}$ .

**1.17.11** Пользуясь производными высших порядков, исследуйте на экстремум следующие функции:

а)  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ; б)  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2$ ;

в)  $f(x) = e^x - e^{-x} - 2 \sin x$ ; г)  $f(x) = x^3 e^{-x}$ .

- 1.17.12** Исследуйте на экстремум следующие функции:
- а)  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ ;
  - б)  $u(x, y, z) = x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3}$ ;
  - в)  $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z$ ;
  - г)  $u(x, y) = x^3 y^2 (12 - x - y), x > 0, y > 0$ .
- 1.17.13** Исследуйте на условный экстремум следующие функции:
- а)  $z = x^2 - y^2$ , если  $2x + y = 1$ ;
  - б)  $z = x^3 + 2xy - y^2 - 13x - 1$ , если  $x + y = 1$ ;
  - в)  $z = 6 - 4x - 3y$ , если  $x^2 + y^2 = 1$ ;
  - г)  $z = x^2 + 12xy + 2y^2$ , если  $4x^2 + y^2 = 25$ ;
  - д)  $u = xy + yz$ , если  $x^2 + y^2 = 2, y + z = 2$ ;
  - е)  $z(x, y) = x \cdot y \cdot z$ , если  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$ .
- 1.17.14** Найдите наибольшее и наименьшее значения данных функций в указанном множестве:
- а)  $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$  на  $[-1, 2]$ ;
  - б)  $y = \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$  на  $[0, 1]$ ;
  - в)  $y = \sqrt{x(10 - x)}$  на  $[0, 10]$ .
- 1.17.15** Найдите соотношение между радиусом  $R$  и высотой  $H$  цилиндра, имеющего при данном объёме  $V$  наименьшую полную поверхность.
- 1.17.16** Найдите высоту конуса наибольшего объёма, который можно вписать в шар радиуса  $R$ .
- 1.17.17** Найдите наибольшие и наименьшие значения следующих функций в указанном множестве:
- а)  $z(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$  в треугольнике, ограниченном осями координат и прямой  $x + y = 5$ ;
  - б)  $z(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$  в области  $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3$ ;
  - в)  $z(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x - 12$  в круге  $x^2 + y^2 \leq 100$ ;
  - г)  $z(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$  в квадрате  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ .
- 1.17.18** Найдите размеры прямоугольного параллелепипеда заданного объёма  $V$ , имеющего наименьшую поверхность.
- 1.17.19** Найдите стороны прямоугольного треугольника, имеющего при данной площади  $S$  наименьший периметр.
- 1.17.20** Представьте положительное число  $a$  в виде произведения четырех положительных чисел так, чтобы их сумма была наименьшей.

## 1.18 Исследование функций и построение графиков

Предлагаем изучить пп. 2.15–2.19 учебного пособия и разобрать примеры исследования функций и построения графиков, приведённые в п. 2.19 учебного пособия.

### Задачи для самостоятельного решения

**1.18.1** Проведите полное исследование и постройте графики следующих функций:

а)  $y = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 5$ ; б)  $y = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$ ;

в)  $y = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$ ; г)  $y = x + \ln(x^2 - 1)$ ; д)  $y = x^2 e^{1/x}$ .

Рекомендуется проделать все исследование самостоятельно, а затем проверить себя, используя пособие И. А. Марона [11].

**1.18.2** Постройте графики гиперболических функций:

а)  $y = \operatorname{sh} x$ , б)  $y = \operatorname{ch} x$ , в)  $y = \operatorname{th} x$ , г)  $y = \operatorname{cth} x$ .

---

## Глава 2

### КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

---

#### Вариант 2.1

1. Найдите производные от данных функций:

а)  $y = 3 \left( \frac{2-x}{x^2} + 4\sqrt{5x+4} \right), \quad y'(1);$

б)  $y = \sqrt{15} \arccos \frac{1}{x^2} + \frac{\operatorname{ctg}^2 5x}{10} + \frac{\operatorname{ctg} 10}{\sin^2 10} x, \quad y'(2);$

в)  $y = 3 [e^{3x} \ln(4x+6) + \operatorname{tg} 8x - (3 \ln 6) \cdot x], \quad y'(0).$

2. Дана функция  $y = \sqrt{5} \left[ \frac{x}{2} \cdot \sqrt{4+x^2} + 2 \ln(x + \sqrt{4+x^2}) \right]$ . Найдите  $y''$ . Вычислите  $y''(1)$ .

3. Дана функция  $f(x) = \begin{bmatrix} 1/\sin 2x \\ \sin 2x \\ -\operatorname{ctg} x \end{bmatrix}$ . Найдите  $f'(x)$  и  $f''(x)$ . Вычислите  $f'(3\pi/4)$  и  $f''(3\pi/4)$ .

4. Докажите, что функция  $z = \sin(x + ay)$  удовлетворяет уравнению  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ .

5. Дана функция  $f(x, y) = \begin{bmatrix} x^2/y \\ x/y^2 \end{bmatrix}$ . Найдите  $f'(x, y)$ . Вычислите  $f'(1, 1/2)$ .

6. Дана функция  $u = xy^2 - z^3$ . Найдите:

а) координаты вектора  $\operatorname{grad} u$  в точке  $M(1, 2, 1)$ ;

б)  $\frac{\partial u}{\partial a}$  в точке  $M$  в направлении вектора  $\mathbf{a}\{2, 3, 6\}$ .

7. Найдите  $y''_{xx}$ , если  $\begin{cases} x = \sin^3 t, \\ y = \cos^3 t. \end{cases}$  Вычислите  $y''_{xx}$ , если  $t = \frac{\pi}{3}$ .
8. Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $xz^2 - x^2y + y^2z + 2x - y = 0$ .  
Вычислите:
- а)  $\frac{\partial z}{\partial x}(0, 1)$ ;
- б)  $\frac{\partial z}{\partial y}(0, 1)$ .
9. К графику функции  $y = \sqrt{x}$  в точке с абсциссой  $x = 7$  проведена касательная. Найдите абсциссу точки пересечения касательной с осью  $OX$ .
10. Найдите  $dy$ , если  $y = \frac{x + 3\sqrt{5 + x^2}}{2}$ . Вычислите значение  $dy$ , если  $x = 2$ ,  $\Delta x = 0,02$ .
11. Дана функция  $z = x^2 + xy + y^2$  и точки  $M_0(1, 2)$  и  $M_1(1,02; 1,96)$ . Вычислите  $\Delta z$  и  $dz$  при переходе из точки  $M_0$  в точку  $M_1$  (ответы округлите до сотых).
12. Дана функция  $y = x^2 + \frac{16}{x} - 16$ . Найдите её наибольшее и наименьшее значения на отрезке  $[1, 4]$ .
13. Дана функция  $z = (x - y^2)\sqrt[3]{(x - 1)^2}$ . Найдите её наибольшее и наименьшее значения на замкнутом множестве, ограниченном кривыми  $y^2 = x$ ,  $x = 2$ .
14. Проведите полное исследование функции  $y = \frac{12}{x^2 - 4}$  и начертите её график.

## Вариант 2.2

1. Найдите производные от данных функций:
- а)  $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 1}$ ,  $y'(0)$ ;
- б)  $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + x^2 - \frac{\pi}{2}x$ ,  $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ;
- в)  $y = \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3-x}{x+2}}\right) \sqrt{\frac{3}{2}}$ ,  $y'(0)$ .
2. Дана функция  $y = 4 \left[ \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2} \right]$ . Найдите  $y''$ . Вычислите  $y''\left(\frac{6}{5}\right)$ .
3. Дана функция  $f(x) = \left[ \frac{(x-4)/x}{x/(x-1)} \right]_{x^2-9}$ . Найдите  $f'(x)$  и  $f''(x)$ .  
Вычислите  $f'(2)$  и  $f''(2)$ .
4. Докажите, что функция  $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$  удовлетворяет уравнению  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ .

5. Дана функция  $f(x, y) = \left[ \frac{3 \operatorname{tg}(x + 3y)}{\sin(4x + 8y)} \right]$ . Найдите  $f'(x, y)$ . Вычислите  $f'(-\pi/12, \pi/12)$ .
6. Дана функция  $u = 7 \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ . Найдите:
  - а) координаты вектора  $\operatorname{grad} u$  в точке  $A(3, -2, 1)$ ;
  - б)  $\frac{\partial u}{\partial a}$  в точке  $A$  в направлении вектора  $\mathbf{a}\{1, 2, 2\}$ .
7. Найдите  $y''_{xx}$ , если  $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \ln \sin t. \end{cases}$  Вычислите  $y''_{xx}$ , если  $t = \frac{\pi}{6}$ .
8. Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $z^3 + 3x^2z = 2xy$ . Вычислите:
  - а)  $\frac{\partial z}{\partial x}(-1, 0, 0)$ ;
  - б)  $\frac{\partial z}{\partial y}(-1, 0, 0)$ .
9. Найдите острый угол (в градусах) между осью  $OX$  и касательной к графику функции  $y = x^2 - 5x + 6$  в точке  $x_0 = 3$ .
10. Найдите  $dy$ , если  $y = \arcsin x$ . Вычислите значение  $dy$ , если  $x = 0$ ,  $\Delta x = 0,08$ .
11. Дана функция  $z = 3x^2 - xy + x + y$  и точки  $M_0(1, 3)$  и  $M_1(1,06; 2,92)$ . Вычислите  $\Delta z$  и  $dz$  при переходе из точки  $M_0$  в точку  $M_1$  (ответы округлите до сотых).
12. Дана функция  $y = 4 - x - \frac{4}{x^2}$ . Найдите её наибольшее и наименьшее значения на отрезке  $[1, 4]$ .
13. Дана функция  $z = \frac{xy}{2} - \frac{x^2y}{6} - \frac{xy^2}{8}$ . Найдите её наибольшее и наименьшее значения на замкнутом множестве, ограниченном прямыми  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ .
14. Проведите полное исследование функции  $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$  и начертите её график.

## Вариант 2.3

1. Найдите производные от данных функций:

а)  $y = 1 - \sqrt[3]{x^2} + \frac{27}{x}$ ,  $y'(-27)$ ;

б)  $y = 3^{-x} \ln(1 - x) - 2^{-x^2}$ ,  $y'(0)$ ;

в)  $y = \arcsin\left(20x + \frac{3}{5}\right) + \operatorname{tg} 8x$ ,  $y'(0)$ .

2. Дана функция  $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$ . Найдите  $y''$ . Вычислите  $y''(-1)$ .

3. Дана функция  $f(x) = \begin{bmatrix} \ln \operatorname{tg} x \\ \sin^2 2x \\ \ln \operatorname{ctg} x \end{bmatrix}$ . Найдите  $f'(x)$  и  $f''(x)$ .  
Вычислите  $f'(\pi/4)$  и  $f''(\pi/4)$ .
4. Докажите, что функция  $z = \frac{x}{y}$  удовлетворяет уравнению  $x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ .
5. Дана функция  $f(x, y) = \begin{bmatrix} \ln(x + \ln y) \\ (2x - 1)^y \end{bmatrix}$ . Найдите  $f'(x, y)$ .  
Вычислите  $f'(1, 1)$ .
6. Дана функция  $u = 2 \operatorname{arctg}(xy + z^2)$ . Найдите:  
а) координаты вектора  $\operatorname{grad} u$  в точке  $A(-1, 3, 2)$ ;  
б)  $\frac{\partial u}{\partial a}$  в точке  $A$  в направлении вектора  $\mathbf{a}\{2, -6, -3\}$ .
7. Найдите  $y''_{xx}$ , если  $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \ln \cos t. \end{cases}$  Вычислите  $y''_{xx}$ , если  $t = \frac{\pi}{3}$ .
8. Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$ .  
Вычислите:  
а)  $\frac{\partial z}{\partial x}(1, -1, -2)$ ;  
б)  $\frac{\partial z}{\partial y}(1, -1, 0)$ .
9. На графике функции  $y = \ln 2x$  взята точка  $A$ . Касательная к графику в точке  $A$  наклонена к оси  $OX$  под углом, тангенс которого равен  $\frac{1}{4}$ . Найдите абсциссу точки  $A$ .
10. Найдите  $dy$ , если  $y = x^6$ . Вычислите значение  $dy$ , если  $x_0 = 2$ ,  $\Delta x = 0,01$ .
11. Дана функция  $z = x^2 + 3xy - 6y$  и точки  $M_0(4, 1)$  и  $M_1(3,96; 1,03)$ . Вычислите  $\Delta z$  и  $dz$  при переходе из точки  $M_0$  в точку  $M_1$  (ответы округлить до сотых).
12. Дана функция  $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)} - 1$ . Найдите её наибольшее и наименьшее значения на отрезке  $[0, 6]$ .
13. Дана функция  $z = 3x^2 - 3xy + y^2 + 4$ . Найдите её наибольшее и наименьшее значения на замкнутом множестве, ограниченном прямыми  $x = -1$ ,  $y = -1$ ,  $x + y = 1$ .
14. Проведите полное исследование функции  $y = x + \frac{4}{x+2}$  и начертите её график.

## Вариант 2.4

1. Найдите производные от данных функций:

а)  $y = \frac{(1 - \sqrt{x})^2}{x}$ ,  $y'(0,01)$ ;

- б)  $y = 2^x e^{-x} + x$ ,  $y'(0)$ ;
- в)  $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $y'(0)$ .
2. Дана функция  $y = e(x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x)$ . Найдите  $y''_{xx}$ . Вычислите  $y''_{xx}(e)$ .
3. Дана функция  $f(x) = \begin{bmatrix} (x^2 + 1)/(x - 1) \\ x \arcsin x \\ x e^{-x} \end{bmatrix}$ . Найдите  $f'(x)$  и  $f''(x)$ . Вычислите  $f'(0)$  и  $f''(0)$ .
4. Докажите, что функция  $z = \cos(xy)$  удовлетворяет уравнению  $y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ .
5. Дана функция  $f(x, y) = \begin{bmatrix} \operatorname{arctg} \frac{x+y}{x-y} \\ \frac{\sin \pi x}{\pi \cos \pi y} \end{bmatrix}$ . Найдите  $f'(x, y)$ . Вычислите  $f'(1, 0)$ .
6. Дана функция  $u = 4 \arcsin(xz + y^2 - 1)$ . Найдите:
- а) координаты вектора  $\operatorname{grad} u$  в точке  $M\left(\frac{1}{5}, 1, 3\right)$ ;
- б)  $\frac{\partial u}{\partial a}$  в точке  $M$  в направлении вектора  $\mathbf{a}\{1, -2, 2\}$ .
7. Найдите  $y''_{xx}$ , если  $\begin{cases} x = \ln \sin t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$  Вычислите  $y''_{xx}$ , если  $t = \frac{\pi}{6}$ .
8. Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - z - 3 = 0$ . Вычислите:
- а)  $\frac{\partial z}{\partial x}(1, -2, 1)$ ;
- б)  $\frac{\partial z}{\partial y}(1, -2, 1)$ .
9. К графику функции  $f(x) = \sqrt{x}$  в точке с абсциссой  $x = 1$  проведена касательная. Найдите ординату точки графика касательной, абсцисса которой равна 31.
10. Найдите  $dy$ , если  $y = x^8$ . Вычислите значение  $dy$ , если  $x = 2$ ,  $\Delta x = 0,001$ .
11. Дана функция  $z = x^2 - y^2 + 6x + 3y$  и точки  $M_0(2, 3)$  и  $M_1(2,02; 2,97)$ . Вычислите  $\Delta z$  и  $dz$  при переходе из точки  $M_0$  в точку  $M_1$  (ответы округлить до сотых).
12. Дана функция  $y = \frac{2(x^2 + 3)}{x^2 - 2x + 5}$ . Найдите её наибольшее и наименьшее значения на отрезке  $[-3, 3]$ .
13. Дана функция  $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ . Найдите её наибольшее и наименьшее значения на замкнутом множестве, ограниченном прямыми  $y = x + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 3$ .



14. Проведите полное исследование функции  $y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$  и начертите её график.

## Вариант 2.5

1. Найдите производные от данных функций:

а)  $y = 2\sqrt[4]{16-2x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y'(0);$

б)  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^3} + \operatorname{tg}^3(2x+4), \quad y'(-2);$

в)  $y = \arcsin \sqrt{\frac{3}{4} + x^2} - 3^{-x}, \quad y'(0).$

2. Дана функция  $y = \frac{1}{2} \ln \frac{x}{x+2}$ . Найдите  $y''$ . Вычислите  $y''(1)$ .

3. Дана функция  $f(x) = \begin{bmatrix} \sin 3x \\ 3/\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \\ \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$ . Найдите  $f'(x)$  и  $f''(x)$ .

Вычислите  $f'(\pi/6)$  и  $f''(\pi/6)$ .

4. Докажите, что функция  $z = \cos y + (y-x) \sin y$  удовлетворяет уравнению

$$(x-y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

5. Дана функция  $f(x,y) = \begin{bmatrix} \ln(2e^x - e^y) \\ \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} \end{bmatrix}$ . Найдите  $f'(x,y)$ .

Вычислите  $f'(0,0)$ .

6. Дана функция  $u = 15\sqrt{1 - (xy + z^2 - 1)^2}$ . Найдите:

а) координаты вектора  $\operatorname{grad} u$  в точке  $M\left(4, \frac{1}{5}, 1\right)$ ;

б)  $\frac{\partial u}{\partial a}$  в точке  $M$  в направлении вектора  $\mathbf{a}\{4, -2, 4\}$ .

7. Найдите  $y''_{xx}$ , если  $\begin{cases} x = \ln \cos t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$  Вычислите  $y''_{xx}$ , если  $t = \frac{\pi}{3}$ .

8. Функция  $z = z(x,y)$  задана неявно уравнением  $xyz = x + y + z$ . Вычислите:

а)  $\frac{\partial z}{\partial x}(1, -2);$

б)  $\frac{\partial z}{\partial y}(1, -2).$

9. На графике функции  $y = x^2 + x - 5$  взята точка  $A$ . Касательная к графику в точке  $A$  наклонена к оси  $OX$  под углом, тангенс которого равен 5. Найдите абсциссу точки  $A$ .

10. Найдите  $dy$ , если  $y = 3\sqrt{4x-1}$ . Вычислите значение  $dy$ , если  $x = 2,5$ ,  $\Delta x = 0,02$ .
11. Дана функция  $z = x^2 + 2xy + 3y^2$  и точки  $M_0(2, 1)$  и  $M_1(1,96; 1,04)$ . Вычислите  $\Delta z$  и  $dz$  при переходе из точки  $M_0$  в точку  $M_1$  (ответы округлить до сотых).
12. Дана функция  $y = 2\sqrt{x} - x$ . Найдите её наибольшее и наименьшее значения на отрезке  $[0, 4]$ .
13. Дана функция  $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ . Найдите её наибольшее и наименьшее значения на замкнутом множестве, ограниченном прямыми  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 2$ .
14. Проведите полное исследование функции  $y = 2 - \frac{1}{x^2}$  и начертите её график.

## Вариант 2.6

1. Найдите производные от данных функций:

а)  $y = 3\sqrt[3]{x^5 + 5x^4 - \frac{5}{x}}$ ,  $y'(1)$ ;

б)  $y = \arctg \operatorname{tg}^2 x$ ,  $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ;

в)  $y = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$ ,  $y'(0)$ .

2. Дана функция  $y = 4(x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2})$ . Найдите  $y''$ . Вычислите  $y''\left(\frac{3}{5}\right)$ .

3. Дана функция  $f(x) = \begin{bmatrix} x^4 \ln x \\ (2+x)/(2-x) \\ (x^2+1)/x \end{bmatrix}$ . Найдите  $f'(x)$  и  $f''(x)$ . Вычислите  $f'(1)$  и  $f''(1)$ .

4. Докажите, что функция  $z = e^{xy}$  удовлетворяет уравнению

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0.$$

5. Дана функция  $f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(x^2 + y^2)^{3/2} \\ \sin\left(\frac{\pi x}{3} + \frac{\pi y}{8}\right) \end{bmatrix}$ . Найдите  $f'(x, y)$ .

Вычислите  $f'(-3, 4)$ .

6. Дана функция  $u = 4 \arccos(x^2 + yz - 1)$ . Найдите:

а) координаты вектора  $\operatorname{grad} u$  в точке  $M\left(1, \frac{1}{5}, 3\right)$ ;

б)  $\frac{\partial u}{\partial a}$  в точке  $M$  в направлении вектора  $\mathbf{a}\{2, -1, -2\}$ .

7. Найдите  $y''_{xx}$ , если  $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = t^3 - 3t + 1. \end{cases}$  Вычислите  $y''_{xx}$ , если  $t = 1$ .
8. Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$ . Вычислите:
- а)  $\frac{\partial z}{\partial x}(1, -1, 6)$ ;
- б)  $\frac{\partial z}{\partial y}(1, -1, -2)$ .
9. К графику функции  $f(x) = e^{2x}$  в точке с абсциссой  $x = 0$  проведена касательная. Найдите абсциссу точки графика касательной, ордината которой равна 19.
10. Найдите  $dy$ , если  $y = 3\sqrt[3]{x^3 + 7x}$ . Вычислите значение  $dy$ , если  $x = 1$ ,  $\Delta x = 0,024$ .
11. Дана функция  $z = x^2 + y^2 + 2x + y - 1$  и точки  $M_0(2, 4)$  и  $M_1(1,98; 3,91)$ . Вычислите  $\Delta z$  и  $dz$  при переходе из точки  $M_0$  в точку  $M_1$  (ответы округлить до сотых).
12. Дана функция  $y = 1 + \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$ . Найдите её наибольшее и наименьшее значения на отрезке  $[-1, 5]$ .
13. Дана функция  $z = xy$ . Найдите её наибольшее и наименьшее значения в круге  $x^2 + y^2 \leq 4$ .
14. Проведите полное исследование функции  $y = \frac{1-x^3}{x^2}$  и начертите её график.

## Вариант 2.7

1. Найдите производные от данных функций:
- а)  $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} - \frac{x}{x^2+1}$ ,  $y'(0)$ ;
- б)  $y = \arcsin^2 7x - \frac{\sin 8x}{x^2-1}$ ,  $y'(0)$ ;
- в)  $y = (\arctg 4) \ln(\arctg 4x) + 5^x - (5 \ln 5)x$ ,  $y'(1)$ .
2. Дана функция  $y = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}$ . Найдите  $y''$ . Вычислите  $y''(2)$ .
3. Дана функция  $f(x) = \begin{bmatrix} (2x-3)^{3/2} \\ \frac{16}{\pi^2} \sin \frac{\pi}{x} \\ (3x-5)^{4/3} \end{bmatrix}$ . Найдите  $f'(x)$  и  $f''(x)$ . Вычислите  $f'(2)$  и  $f''(2)$ .
4. Докажите, что функция  $z = xe^{y/x}$  удовлетворяет уравнению  $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ .

5. Дана функция  $f(x, y) = \left[ \frac{e^{2x+1} - e^{3y}}{3\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} \right]$ . Найдите  $f'(x, y)$ .  
Вычислите  $f'(0, 0)$ .
6. Дана функция  $u = 6 \ln(xz + y^2 - 1)$ . Найдите:
  - а) координаты вектора  $\text{grad } u$  в точке  $M(2, 1, 3)$ ;
  - б)  $\frac{\partial u}{\partial a}$  в точке  $M$  в направлении вектора  $\mathbf{a}\{-3, -2, 6\}$ .
7. Найдите  $y''_{xx}$ , если  $\begin{cases} x = 3 \cos^2 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$  Вычислите  $y''_{xx}$ , если  $t = \frac{\pi}{6}$ .
8. Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$ .  
Вычислите:
  - а)  $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1, 0)$ ;
  - б)  $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 1, 0)$ .
9. К графику функции  $f(x) = \cos \frac{2}{3}x$  в точке с абсциссой  $x = -\frac{\pi}{2}$  проведена касательная. Найдите острый угол (в градусах) между касательной и осью  $OX$ .
10. Найдите  $dy$ , если  $y = 3\sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}$ . Вычислите значение  $dy$ , если  $x_0 = 1$ ,  $\Delta x = 0,01$ .
11. Дана функция  $z = 3x^2 + 2y^2 - xy$  и точки  $M_0(-1, 3)$  и  $M_1(-0,98; 2,97)$ . Вычислите  $\Delta z$  и  $dz$  при переходе из точки  $M_0$  в точку  $M_1$  (ответы округлить до сотых).
12. Дана функция  $y = x - 4\sqrt{x} + 5$ . Найдите её наибольшее и наименьшее значения на отрезке  $[1, 9]$ .
13. Дана функция  $z = \sqrt{3 - x^2 - 2y^2}$ . Найдите её наибольшее и наименьшее значения в круге  $x^2 + y^2 \leq 1$ .
14. Проведите полное исследование функции  $y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$  и начертите её график.

## Вариант 2.8

1. Найдите производные от данных функций:

а)  $y = \sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) \frac{5}{3}}, \quad y' \left(\frac{1}{2}\right);$

б)  $y = 40 \arctg \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}}, \quad y' \left(\frac{3}{5}\right);$

в)  $y = \frac{1}{2} \text{tg}^2 x - \ln \cos x, \quad y' \left(\frac{\pi}{4}\right).$

2. Дана функция  $y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ . Найдите  $y''$ . Вычислите  $y''\left(\frac{1}{2}\right)$ .
3. Дана функция  $f(x) = \begin{bmatrix} x/(x^2+1) \\ 4 \operatorname{arctg}\left(x - \sqrt{1+x^2}\right) \\ (8e^x)/(1+e^x) \end{bmatrix}$ . Найдите  $f'(x)$  и  $f''(x)$ . Вычислите  $f'(0)$  и  $f''(0)$ .
4. Докажите, что функция  $z = x^y$  удовлетворяет уравнению  $y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - (1 + y \ln x) \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ .
5. Дана функция  $f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x \sin^2 y \\ \operatorname{tg} x + y \end{bmatrix}$ . Найдите  $f'(x, y)$ . Вычислите  $f'(0, \pi/4)$ .
6. Дана функция  $u = 2 \operatorname{arctg}(x^2 + yz - 4)$ . Найдите:
  - а) координаты вектора  $\operatorname{grad} u$  в точке  $M(2, 1, 1)$ ;
  - б)  $\frac{\partial u}{\partial a}$  в точке  $M$  в направлении вектора  $\mathbf{a}\{2, -6, 3\}$ .
7. Найдите  $y''_{xx}$ , если  $\begin{cases} x = 3 \sin^2 t, \\ y = 2 \cos^3 t. \end{cases}$  Вычислите  $y''_{xx}$ , если  $t = \frac{\pi}{3}$ .
8. Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $z = y + \ln \frac{x}{z}$ . Вычислите:
  - а)  $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1, 1)$ ;
  - б)  $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 1, 1)$ .
9. К графику функции  $f(x) = \ln(3x)$  в точке с абсциссой  $x = \frac{1}{3}$  проведена касательная. Найдите абсциссу той точки касательной, ордината которой равна 29.
10. Найдите  $dy$ , если  $y = 2\sqrt{x^2 + x + 3}$ . Вычислите значение  $dy$ , если  $x = 2$ ,  $\Delta x = 0,006$ .
11. Дана функция  $z = x^2 - y^2 + 5x + 4y$  и точки  $M_0(3, 2)$  и  $M_1(3,05; 1,98)$ . Вычислите  $\Delta z$  и  $dz$  при переходе из точки  $M_0$  в точку  $M_1$  (ответы округлить до сотых).
12. Дана функция  $y = \frac{10x}{1+x^2}$ . Найдите её наибольшее и наименьшее значения на отрезке  $[0, 3]$ .
13. Дана функция  $z = 4x + 2y + 4x^2 + y^2 + 6$ . Найдите её наибольшее и наименьшее значения на замкнутом множестве, ограниченном прямыми  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y + 2 = 0$ .
14. Проведите полное исследование функции  $y = \ln(x^2 - 1)^2$  и начертите её график.

## Вариант 2.9

1. Найдите производные от данных функций:

а)  $y = \left[ \sqrt[3]{\frac{1}{7+x^2}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \right] \cdot 24, \quad y'(1);$

б)  $y = \frac{8}{3} [\ln(\sin 2x) - 2^{-3x} - (2 \operatorname{ctg} 2) \cdot x], \quad y'(1);$

в)  $y = 10 \left( \operatorname{arctg}(x+1)^3 + \frac{\sin(3x)}{x^2+5} \right), \quad y'(0).$

2. Дана функция  $y = 4e^{\sqrt{x}-1}(\sqrt{x}-1)$ . Найдите  $y''$ . Вычислите  $y''(1)$ .

3. Дана функция  $f(x) = \left[ \begin{array}{c} \operatorname{tg} 2x \\ (2+x)/(2-x) \\ \ln(x^2+1) \end{array} \right]$ . Найдите  $f'(x)$  и  $f''(x)$ . Вычислите  $f'(0)$  и  $f''(0)$ .

4. Докажите, что функция  $z = \frac{y}{x}$  удовлетворяет уравнению  $y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ .

5. Дана функция  $f(x, y) = \left[ \begin{array}{c} 4\sqrt{x^2+y} \\ e^{3x-y} \end{array} \right]$ . Найдите  $f'(x, y)$ . Вычислите  $f'(1, 3)$ .

6. Дана функция  $u = 5 \arcsin(yz + x^2 - 4)$ . Найдите:

а) координаты вектора  $\operatorname{grad} u$  в точке  $M\left(2, \frac{12}{13}, 1\right)$ ;

б)  $\frac{\partial u}{\partial a}$  в точке  $M$  в направлении вектора  $\mathbf{a}\{1, -2, -2\}$ .

7. Найдите  $y''_{xx}$ , если  $\begin{cases} x = t^4 - t^2 + 1, \\ y = t^4 + t^2 + 1. \end{cases}$  Вычислите  $y''_{xx}$ , если  $t = -1$ .

8. Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$ . Вычислите:

а)  $\frac{\partial z}{\partial x}(2, 0, 1);$

б)  $\frac{\partial z}{\partial y}(2, 0, 1).$

9. К графику функции  $f(x) = x^2 + 3x + 2$  в точке с абсциссой  $x = 0$  проведена касательная. Найдите ординату той точки касательной, абсцисса которой равна 11.

10. Найдите  $dy$ , если  $y = \frac{2}{\sqrt{2x^2 + x + 1}}$ . Вычислите значение  $dy$ , если  $x_0 = 1$ ,  $\Delta x = 0,016$ .

11. Дана функция  $z = 2xy + 3y^2 - 5x$  и точки  $M_0(3, 4)$  и  $M_1(3,04; 3,95)$ . Вычислите  $\Delta z$  и  $dz$  при переходе из точки  $M_0$  в точку  $M_1$  (ответы округлить до сотых).

12. Дана функция  $y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)} - 2$ . Найдите её наибольшее и наименьшее значения на отрезке  $[-3, 3]$ .
13. Дана функция  $z = x - 2y - 3$ . Найдите её наибольшее и наименьшее значения на замкнутом множестве, ограниченном прямыми  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 1$ .
14. Проведите полное исследование функции  $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$  и начертите её график.

## Вариант 2.10

1. Найдите производные от данных функций:

а)  $y = \sqrt[3]{x^2 - 4x + 27} - \frac{1}{3-x}$ ,  $y'(0)$ ;

б)  $y = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x$ ,  $y'\left(\frac{4}{5}\right)$ ;

в)  $y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$ ,  $y'(2)$ .

2. Дана функция  $y(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$ . Найдите  $y''$ . Вычислите  $y''(0)$ .

3. Дана функция  $f(x) = \left[ \begin{array}{c} x^2 e^{-x+2} \\ \sqrt{8x-15} \\ 2 \operatorname{arctg}(x-1) \end{array} \right]$ . Найдите  $f'(x)$  и  $f''(x)$ . Вычислите  $f'(2)$  и  $f''(2)$ .

4. Докажите, что функция  $z = \frac{x^2}{y^2}$  удовлетворяет уравнению  $y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ .

5. Дана функция  $f(x, y) = \left[ \begin{array}{c} \cos(2x - 3y) + \sin 4x \\ \operatorname{tg}(8x + 3y) \end{array} \right]$ . Найдите  $f'(x, y)$ . Вычислите  $f'(\pi/12, -\pi/9)$ .

6. Дана функция  $u = 2 \ln(x^2 + yz - 4)$ . Найдите:

а) координаты вектора  $\operatorname{grad} u$  в точке  $M(2, 2, 1)$ ;

б)  $\frac{\partial u}{\partial a}$  в точке  $M$  в направлении вектора  $\mathbf{a}\{2, 2, -1\}$ .

7. Найдите  $y''_{xx}$ , если  $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^3 + t^2. \end{cases}$  Вычислите  $y''_{xx}$ , если  $t = 1$ .

8. Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $xz^5 + y^3z - x^3 = 0$ . Вычислите:

а)  $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0)$ ;

б)  $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 0)$ .

9. Найдите уравнение  $y = kx + b$  касательной к графику функции  $f(x) = 2x^2 + x - 1$ , которая параллельна прямой  $y = 5x + 7$ . В ответ введите сначала значение  $k$ , затем  $b$ .
10. Найдите  $dy$ , если  $y = \sqrt{x^2 + 5}$ . Вычислите значение  $dy$ , если  $x_0 = 2$ ,  $\Delta x = 0,06$ .
11. Дана функция  $z = xy + 2y^2 - 2x$  и точки  $M_0(1, 2)$  и  $M_1(0,97; 2,03)$ . Вычислите  $\Delta z$  и  $dz$  при переходе из точки  $M_0$  в точку  $M_1$  (ответы округлить до сотых).
12. Дана функция  $y = 2x^2 + \frac{108}{x} - 59$ . Найдите её наибольшее и наименьшее значения на отрезке  $[2, 4]$ .
13. Дана функция  $z = 2xy - 3x^2 - 3y^2 + 4(x + y + 1)$ . Найдите её наибольшее и наименьшее значения в прямоугольнике  $0 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 2$ .
14. Проведите полное исследование функции  $y = \frac{10x}{(1+x)^3}$  и начертите её график.



---

## Приложение А

### ОТВЕТЫ НА ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

---

**1.1.12** а)  $2^{2x}$ ; б)  $2^{x^2}$ .

**1.1.13**  $x^2$ .

**1.1.14**  $x$ .

**1.1.15** а)  $[-1, +\infty)$ ; б)  $[-2, 2]$ ; в)  $[-1, 2]$ ; г)  $[1, 2]$ .

**1.1.17** а)  $[4, +\infty)$ ; б)  $[-1, 3]$ .

**1.1.20** а) и в).

**1.1.21**  $y = \log_2 \frac{x}{1-x}$ .

**1.2.7** а) 3; б) 0; в)  $\infty$ ; г)  $1/8$ .

**1.2.8** а) 2; б)  $1/3$ ; в) 0; г) 1.

**1.2.9** а)  $\infty$ ; б)  $3/2$ ; в)  $-2/3$ ; г) 0.

**1.3.15** а) 11; б) 10.

**1.3.16** а) 4; б) 27; в)  $3/4$ .

**1.3.17** а)  $3/2$ ; б)  $5/3$ .

**1.3.18** а)  $1/2$ ; б) 8; в) 0; г)  $\infty$ .

**1.3.19** а) -3; б) 5.

**1.3.20** а)  $1/4$ ; б)  $5/6$ ; в)  $-1/12$ ; г)  $-1/6$ .

**1.3.21** а)  $1/2$ ; б)  $\pm 1$ ; в) 2.

**1.3.22** а)  $+\infty$ ; б) 0; в) 0.

**1.4.3** а) 4; б)  $5/3$ ; в) 2; г) 5; д)  $4/3$ ; е) 2.

**1.4.4** а)  $3/4$ ; б)  $2/3$ ; в)  $1/2$ ; г)  $-7/2$ ; д)  $\sqrt{2}$ ; е)  $-1/12$ .

**1.4.5** а)  $\cos \alpha$ ; б)  $1/\sqrt{3}$ ; в) -24; г) 1.

- 1.4.6 а)  $\sqrt{2}/8$ ; б) 1; в)  $3/2$ ; г)  $-\sin a$ .
- 1.5.6 а)  $e^2$ ; б)  $e^{4/5}$ ; в) 1; г) 0; д)  $+\infty$ .
- 1.5.7 а)  $e^{8/5}$ ; б)  $e$ ; в)  $e^2$ ; г)  $e^5$ ; д) 1; е)  $\infty$ ; ж) 0.
- 1.5.8 а) 0; б) 0; в)  $+\infty$ ; г)  $+\infty$ .
- 1.6.9 а)  $4 \log_3 e$ ; б)  $5 \ln 2$ ; в)  $3/5$ .
- 1.6.10 а) 2; б)  $2 \ln 5$ ; в)  $2/3$ .
- 1.6.11 а)  $16/11$ ; б)  $-12$ ; в) 4.
- 1.6.12 а)  $(4/5) \ln 3$ ; б)  $8 \ln 2$ ; в) 4.
- 1.6.13 а) 2; б)  $e^{-2}$ .
- 1.7.12 а) 3; б) 1; в)  $5/4$ .
- 1.7.13 а) 4; б)  $9/5$ ; в) 4.
- 1.7.14 а)  $8/9$ ; б)  $1/5$ ; в)  $-4$ ; г)  $-3$ .
- 1.7.15 а)  $(1/3)(x-3)^{3/4}$ ; б)  $(1/16)(x-2)$ ; в)  $2x^3$ .
- 1.7.16 а)  $4/x^5$ ; б)  $6/x^7$ ; в)  $5/x^{7/2}$ .
- 1.7.17 а)  $\frac{2}{(x-1)^2}$ ; б)  $\frac{9}{(x-2)^4}$ ; в)  $\frac{8}{(x-4)^{1/4}}$ .
- 1.7.18 а)  $3x^{9/4}$ ; б)  $(1/5)x^2$ .
- 1.8.8 а) 1-го рода; б) устранимый; в) 2-го рода.
- 1.8.9 а) и в) точка устранимого разрыва; б) точка непрерывности.
- 1.8.10 а)  $x_1 = -2$  и  $x_2 = 2$  — точки разрыва первого рода,  $x_3 = 0$  — точка разрыва второго рода; б)  $x_1 = -2$  — точка разрыва первого рода;  $x_2 = 0$  — точка устранимого разрыва;  $x_3 = 2$  — точка разрыва второго рода.
- 1.8.11 а)  $x_1 = -2$  — разрыв второго рода,  $x_2 = 0$  — разрыв первого рода,  $x_3 = 1$  — устранимый разрыв; б)  $x_1 = -4$  — устранимый разрыв,  $x_2 = 0$  — точка непрерывности,  $x_3 = 3$  — разрыв второго рода.
- 1.9.9 а)  $67/3$ ; б)  $-27$ ; в) 20.
- 1.9.10 а)  $(\pi/3) + 4/\sqrt{3}$ ; б)  $(2\pi + 1)/16$ ; в)  $2/9$ ; г)  $-4/9$ ; д) 4.
- 1.9.11 а)  $40 \cdot 3^{19}$ ; б)  $5/2$ ; в)  $-4\sqrt{3}$ ; г)  $12 \ln 3$ ; д)  $-\pi/8$ ; е)  $\sqrt{3}\pi/4$ ; ж)  $(3/2) \cos^2 1 \sin 1$ ; з)  $1/(2e^2 \ln 2)$ ; и)  $-\pi^3/4$ .
- 1.9.12 а)  $y' = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^4} \sqrt{(x+3)^5}} \left[ \frac{1}{2(x-1)} - \frac{4}{3(x+2)} - \frac{5}{2(x+3)} \right]$ ;  
 б)  $y' = e^x \cdot \sin 2x \cdot \cos 3x \cdot \operatorname{tg} 5x \left( 1 + 2 \operatorname{ctg} 2x - 3 \operatorname{tg} 3x + \frac{5}{\operatorname{tg} 5x} \cdot \frac{1}{\cos^2 5x} \right)$ .
- 1.9.13 а)  $(\ln x)^{\sqrt[3]{x}} \left( \frac{\ln \ln x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x} \frac{1}{x \ln x} \right)$ ;  
 б)  $(\sqrt{x})^x \left( \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \right)$ ; в)  $\sqrt[3]{x^2+1} \left[ \frac{2}{x^2+1} - \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} \right]$ .

1.9.15 а)  $\frac{1}{2} \left( \operatorname{sh} \frac{x}{2} + \operatorname{ch} \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{2} e^{x/2}$ ; б)  $\operatorname{th} x$ ; в)  $\frac{1}{\operatorname{ch} x}$ ; г)  $4 \operatorname{sh} 4x$ .

1.9.16 а)  $\frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})}$ ; б)  $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ ; в)  $\frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$ ; г)  $\frac{1}{2(1+x^2)}$ .

1.10.3 а)  $\frac{18x}{(4-9x^2)^2}$ ; б)  $\frac{9x}{\sqrt{(16-9x^2)^3}}$ ; в)  $\frac{-18x}{(4+9x^2)^2}$ .

1.10.4 а)  $y' = \ln x + 1$ ,  $y'' = \frac{1}{x}$ ,  $y^{(n)} = \frac{(-1)^n (n-2)!}{x^{n-1}}$ ;

б)  $y' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$ ,  $y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$ ;  $n = 2, 3, 4, \dots$ ;

в)  $\frac{1}{2} \left\{ 6^n \sin \left( 6x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) - 2^n \sin \left( 2x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right\}$ ;

г)  $\frac{2(-1)^n \cdot n!}{(x+4)^{n+1}} + \frac{3(-1)^n \cdot n!}{(x+5)^{n+1}}$ .

1.10.5 а)  $-x^2 \sin x + 20x \cos x + 90 \sin x$ ; б)  $x \operatorname{ch} x + 100 \operatorname{sh} x$ ;

в)  $3^x x^2 (\ln 3)^{20} + 40 \cdot 3^x \cdot x (\ln 3)^{19} + 380 (\ln 3)^{18} 3^x$ .

1.10.6 а)  $y''' = \begin{vmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{vmatrix}$ ; б)  $y''' = \begin{vmatrix} -8 \cos 2x \\ 8 \sin 2x \\ 6 \end{vmatrix}$ ; в)  $y''' = 6 \mathbf{i} - \cos t \mathbf{k}$ .

1.11.11  $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = -\frac{4}{3}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = \frac{2}{3}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z}(M_0) = \frac{13}{3}$ .

1.11.13 а)  $u''_{xx}(M_0) = 2$ ,  $u''_{yx}(M_0) = 0$ ,  $u''_{zx}(M_0) = 0$ ,  $u''_{yy}(M_0) = 4$ ,

$u''_{yz}(M_0) = 6$ ,  $u''_{zz}(M_0) = 9$ ; б)  $u''_{xx}(M_0) = \frac{2}{125}$ ,  $u''_{xy}(M_0) = -\frac{36}{125}$ ,

$u''_{zx}(M_0) = -\frac{3}{125}$ ,  $u''_{yy}(M_0) = \frac{23}{125}$ ,  $u''_{yz}(M_0) = \frac{4}{125}$ ,  $u''_{zz}(M_0) = 0$ .

1.11.14 а)  $u'''_{xxx}(M_0) = -8$ ,  $u'''_{yyy}(M_0) = -27$ ,  $u'''_{zzz}(M_0) = -64$ ,  $u'''_{xxy}(M_0) = -12$ ,

$u'''_{yyx}(M_0) = -18$ ,  $u'''_{xxz}(M_0) = -16$ ,  $u'''_{yyz}(M_0) = -36$ ,  $u'''_{zzx}(M_0) = -32$ ,

$u'''_{zzy}(M_0) = -48$ ,  $u'''_{xyx}(M_0) = -24$ ;

б)  $u'''_{xxx}(M_0) = 48$ ,  $u'''_{yyy}(M_0) = 60$ ,  $u'''_{yxx}(M_0) = -12$ ,  $u'''_{xyy}(M_0) = 12$ .

1.11.16 а)  $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \left( -\frac{2}{x^3} \right) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{1}{x}$ ,

$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{6}{x^4} - \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{4}{x^6} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{4}{x^4}$ ;

б)  $\frac{dz}{dx} = 2 \frac{\partial f}{\partial u} \cdot e^{2x} + \cos x \frac{\partial f}{\partial v}$ ,

$\frac{d^2 z}{dx^2} = 4e^{2x} \frac{\partial f}{\partial u} - \sin x \frac{\partial f}{\partial v} + 4e^{4x} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (\cos^2 x) \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 4e^{2x} \cos x \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ ;

в)  $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 3x^2$ ,  $\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial u} + 6x \frac{\partial f}{\partial v} + 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 9x^4 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 12x^3 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2x \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x} + 3x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial x}$ ;

$$\begin{aligned} \text{r) } \frac{dz}{dx} &= \sin 2xf(u, v) + 2 \sin^2 x \frac{\partial f}{\partial u} + 5 \sin^2 x \frac{\partial f}{\partial v}, \\ \frac{d^2 z}{dx^2} &= 2 \cos 2xf(u, v) + 4 \sin 2x \frac{\partial f}{\partial u} + 10 \sin 2x \frac{\partial f}{\partial v} + 4 \sin^2 x \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \\ &+ 25 \sin^2 x \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 20 \sin^2 x \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}. \end{aligned}$$

$$1.12.4 \quad \text{a) } \left\{ \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right\}; \quad \text{б) } \left\{ -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right\}.$$

$$1.12.5 \quad \text{a) } \{-4, 2, 2\}, \sqrt{24}; \quad \text{б) } \{8, 8, 9\}, \sqrt{209}.$$

$$1.12.6 \quad \text{a) } 3; \quad \text{б) } -\frac{8}{\sqrt{3}}.$$

$$1.12.7 \quad -\frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

$$1.12.8 \quad \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$1.12.9 \quad \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

$$1.13.3 \quad \text{a) } \frac{1}{2}; \quad \text{б) } -1.$$

$$1.14.6 \quad \text{a) } -\frac{2x^3 - 3xy^2}{2y^3 - 3x^2y}; \quad \text{б) } \frac{y^x \ln y}{1 - xy^{x-1}}.$$

$$1.14.7 \quad \text{a) } 3 \text{ или } -1; \quad \text{б) } 1.$$

$$1.14.8 \quad \text{a) } \frac{e^x(e^y + 1)^2 - e^y(e^x + 1)^2}{(e^y + 1)^3}; \quad \text{б) } \frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3}.$$

$$1.14.9 \quad \text{a) } -\frac{2}{3}; \quad \text{б) } 4; -4.$$

$$1.14.10 \quad \text{a) } -\frac{3x^2y^2 + 2xz^3}{3z^2x^2 + 2zy}, -\frac{2x^3y + z^2}{3z^2x^2 + 2zy}; \quad \text{б) } -\frac{z}{x}, -\frac{z}{y}.$$

$$1.14.11 \quad \text{a) } -\frac{x^2 + z^2}{z^3}, -\frac{xy}{z^3}, -\frac{y^2 + z^2}{z^3}; \quad \text{б) } -\frac{x + y + z}{(x + y + z - 1)^3}.$$

$$1.14.12 \quad \text{a) } z''_{xx}(M_0) = \frac{1}{4} = z''_{yy}, \quad z''_{xy}(M_0) = -\frac{1}{4}; \quad \text{б) } z''_{xx}(M_0) = -\frac{2}{5}, \quad z''_{yy}(M_0) = -\frac{394}{125}, \\ z''_{xy}(M_0) = -\frac{1}{5}.$$

$$1.15.10 \quad v = 14 \text{ см/с}, \quad a = 12 \text{ см/с}^2.$$

$$1.15.11 \quad 0,2\pi \text{ м}^2/\text{с}; \quad 0,05\pi \text{ м}^3/\text{с}.$$

$$1.15.12 \quad -1,2 \text{ см/с}.$$

$$1.15.13 \quad \text{a) } 2x + y = 0, \quad x - 2y + 5 = 0; \quad \text{б) } 8x + y + 7 = 0, \quad x - 8y + 74 = 0.$$

$$1.15.14 \quad \text{a) } 9x + 2y + 12 = 0, \quad 2x - 9y + 31 = 0; \quad \text{б) } 3x - y - 5 = 0, \quad x + 3y - 5 = 0.$$

$$1.15.16 \quad 3x + 2y \pm 9 = 0.$$

$$1.15.17 \quad 3x - 4y \pm 10 = 0.$$

1.15.18 а)  $2x - y - 3 = 0$ ,  $x + 2y - 14 = 0$ ;

б)  $x - 2y + 1 = 0$ ,  $2x + y - 8 = 0$ .

1.15.19 а)  $\frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ ,  $x + 2y + 3z - 9 = 0$ ;

б)  $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-\frac{\pi}{2}}{-1}$ ,  $2x + y - z + \frac{\pi}{2} = 0$ .

1.15.20 а)  $12x - 8y - z - 32 = 0$ ,  $\frac{x-2}{12} = \frac{y+2}{-8} = \frac{z-8}{-1}$ ;

б)  $12y - z + 14 = 0$ ,  $\frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{12} = \frac{z+10}{-1}$ .

1.15.21 а)  $x - 2y + 3z - 6 = 0$ ,  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{3}$ ;

б)  $4x - y - 4z - 12 = 0$ ,  $\frac{x-2}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-4}$ .

1.15.22  $x + y + z = 2\sqrt{10}$ .

1.15.23  $x + 4y + 6z - 21 = 0$ .

1.16.12 а)  $dy = -\frac{2dx}{x^3}$ ; б)  $dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$ ; в)  $dy = \frac{|a|}{a} \cdot \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ .

1.16.13 а)  $du = \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy$ ; б)  $du = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$ ;

в)  $du = (y+z)dx + (x+z)dy + (y+x)dz$ .

1.16.15 а)  $\Delta y = 0,6432$ ,  $dy = 0,6400$ ;

б)  $\Delta y = 0,1314$ ,  $dy = 0,1300$ .

1.16.16 а) 2,0030; б) 0,9948.

1.16.17 а)  $\Delta z \cong 0,1990$ ,  $dz = 0,2000$ ;

б)  $\Delta z = 0,0201$ ,  $dz = 0,0200$ .

1.16.18 а) 31,128; б) 2,950.

1.16.21 а)  $d^2z = \frac{y^2(dx)^2 - xydx dy + x^2(dy)^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ ;

б)  $d^2z = \frac{z[(6x^2 - 2y^2)(dx)^2 + (6y^2 - 2x^2)(dy)^2 + 16xydx dy]}{(x^2 + y^2)^3} - \frac{4xdxdz - 4ydydz}{(x^2 + y^2)^2}$ ;

в)  $d^2z = \frac{2}{y^3}[x(dy)^2 - ydx dy]$ ;

г)  $d^2z = 6[(x-y)(dx)^2 + 2(y-x)dx dy + (y+x)(dy)^2]$ .

1.16.22 а)  $d^2z = [f''(t)(\sin 2x)^2 + f'(t)2 \cos 2x](dx)^2$ ;

б)  $d^2z = \left[ f''(t)\frac{y^2}{x^4} + \frac{2yf'(t)}{x^3} \right] (dx)^2 - 2 \left[ \frac{y}{x^3}f''(t) + \frac{f'(t)}{x^2} \right] dx dy + f''(t)\frac{(dy)^2}{x^2}$ ;

в)  $d^2z = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}a^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}ab + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}b^2 \right) (dx)^2$ ;

$$\text{г) } d^2z = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) (dx)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) dx dy + \\ + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) (dy)^2.$$

**1.16.23** а)  $dy = \frac{x+y}{y-x} dx$ ,  $d^2z = \frac{2a^2}{(x-y)^3} (dx)^2$ ; б)  $dy = \frac{y}{x} dx$ ,  $d^2y = 0$ .

**1.16.24** а)  $dz = \frac{(yz-1)dx + (xz-1)dy}{1-xy}$ ,  
 $d^2z = \frac{2y(yz-1)(dx)^2 + 4z dx dy + 2x(xz-1)(dy)^2}{(1-xy)^2}$ ;  
 б)  $dz = \frac{z(ydx + zdy)}{y(x+z)}$ ,  $d^2z = -\frac{z^2(ydx - xdy)^2}{y^2(x+z)^3}$ .

**1.17.10** а) нет точек экстремума;

б)  $x_1 = 0$  — точка максимума,  $x_2 = 1$  — точка минимума;

в)  $x_1 = 0$  — точка минимума,  $x_2 = -\frac{2}{5}$  — точка максимума;

г)  $x_1 = 5$  и  $x_2 = -1$  — минимумы,  $x_3 = \frac{1}{2}$  — максимум.

**1.17.11** а)  $x_0 = e$  — минимум; б)  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 3$  — минимум,  $x_3 = 2$  — максимум,

в) нет точек экстремума; г)  $x = 3$  — максимум.

**1.17.12** а)  $M_1(\sqrt{2}, \sqrt{-2})$  и  $M_2(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  — минимумы;

б)  $(0, 0, 0)$  — минимум; в)  $M(2, 3, 1)$  — минимум; г)  $M(6, 4)$  — максимум.

**1.17.13** а)  $M_1\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$  — условный максимум;

б)  $M_1(-1, 2)$  — условный максимум;  $M_2(3, -2)$  — условный минимум;

в)  $M_1\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$  — условный минимум,  $M_2\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$  — условный максимум;

г)  $M_1(-2, 3)$  и  $M_2(2, -3)$  — условный минимум;  $M_3\left(-\frac{3}{2}, -4\right)$  и  $M_4\left(\frac{3}{2}, 4\right)$  — условный максимум; д)  $M_1(1, 1, 1)$  — условный максимум;

е)  $M_1\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$  — условный минимум, имеются ещё пять точек условного экстремума.

**1.17.14** а) 2 и -10; б) 1 и  $\frac{3}{5}$ ; в) 5 и 0.

**1.17.15**  $H = 2R$ .

**1.17.16**  $H = \frac{4}{3}R$ .

**1.17.17** а) 1 и 61; б) -1 и 6; в) -16 и 192; г) 20 и 28.

**1.17.18**  $x = y = z = \sqrt[3]{V}$ .

**1.17.19**  $\sqrt{2s}$ ,  $\sqrt{2s}$  и  $2\sqrt{s}$ .

**1.17.20** все множители равны между собой.



Учебное издание

**Магазинников** Леонид Иосифович  
**Магазинников** Антон Леонидович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА.  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное методическое пособие

Корректор Осипова Е. А.  
Компьютерная верстка Хомич С. Л.

Подписано в печать 26.08.13. Формат 60х84/8.

---

Издано в ООО «Эль Контент»  
634029, г. Томск, ул. Кузнецова д. 11 оф. 17  
Отпечатано в Томском государственном университете  
систем управления и радиоэлектроники.  
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40  
Тел. (3822) 533018.