maΣprof∫.ru

Высшая математика – просто и доступно!

Интенсивный курс
«Кратные и криволинейные интегралы»

Настоящий курс *позволяет быстро освоить* ***типовые*** *двойные, тройные и криволинейные интегралы, а также их основные приложения.* ***Материал предназначен*** *для студентов-заочников и других читателей, которые хотят освоить практику в максимально короткие сроки*

! Предполагается*, что читатель хотя бы на среднем уровне умеет брать производные, в том числе частные, решать определённые и неопределённые интегралы и, кроме того, строить графики основных функций (линии на плоскости и поверхности в пространстве).*

Автор: Александр Емелин

Содержание

1. Двойные интегралы

Начнём с насущного вопроса – что это такое?

1.1. Понятие двойного интеграла

Двойной интеграл *в общем виде* **записывается** следующим образом:

$$\iint_D f(x;y)dxdy$$

Разбираемся в терминах и обозначениях:

$\iint$ – значок двойного интеграла;

D – ***область интегрирования*** (плоская фигура);

$f(x;y)$ – *подынтегральная* ***функция двух переменных***, часто она довольно простая;

dx, dy – значки *дифференциалов*.

➢ Что значит решить двойной интеграл?

Решить двойной интеграл – это значит **найти ЧИСЛО**. Самое обычное число:

$\iint_D f(x;y)dxdy = C$, где $C = const$ …И крайне желательно найти его правильно ☺

Результат (число C) может быть отрицательным. И ноль тоже запросто может получиться. Специально остановился на данном моменте, поскольку немало студентов испытывают беспокойство, когда ответ получается «шото вроде как странный».

Многие помнят, что «обычный» *определённый интеграл* – это тоже число. Здесь всё так же. У двойного интеграла существует и отличный геометрический смысл (даже не один), но об этом позже, всему своё время.

➢ Как решить двойной интеграл? Повторные интегралы

Для того чтобы вычислить двойной интеграл, его нужно свести к так называемым ***повторным интегралам***. Сделать это можно двумя способами. Наиболее распространён следующий способ:

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_{?}^{?} dx \int_{??}^{??} f(x;y)dy$$

Вместо знаков вопроса необходимо расставить *пределы интегрирования*. **Причём** одиночные знаки вопроса ? у внешнего интеграла – это числа, а двойные знаки вопроса ?? у внутреннего интеграла – это функции одной переменной $y = f(x)$.

Откуда взять пределы интегрирования? Они зависят от того, какая в условии задачи дана *область* D. Область D представляет собой обычную ***плоскую фигуру***, с которой вы неоднократно сталкивались, в частности, при вычислении площади плоской фигуры или вычислении объёма тела вращения. Очень скоро вы узнаете, как правильно расставлять пределы интегрирования.

После того, как переход к повторным интегралам осуществлён, следуют непосредственно вычисления: сначала берётся внутренний интеграл $\int_{??}^{??} f(x;\, y)dy$, а потом – внешний. Друг за другом. Отсюда и название – повторные интегралы.

Грубо говоря, **решение сводится к вычислению двух определённых интегралов.** Как видите всё не так сложно и страшно, и если вы совладали с «обыкновенным» определённым интегралом, что мешает разобраться с двумя интегралами?!

Второй способ перехода к *повторным интегралам* встречается несколько реже:
…

Что поменялось? Поменялся порядок интегрирования: теперь внутренний интеграл берётся по «икс», а внешний – по «игрек». Пределы интегрирования, обозначенные звёздочками – **будут другими!** *(в общем случае)*. Одиночные звёздочки внешнего интеграла – это числа, а двойные звёздочки внутреннего интеграла – это обратные функции $x = g(y)$, зависящие от «игрек».

Какой бы мы ни выбрали способ перехода к повторным интегралам, окончательный ответ обязательно получится один и тот же:

$$\int_{?}^{?} dx \int_{??}^{??} f(x;\, y)dy = ... = C$$

Пожалуйста, запомните это важное свойство, которое можно использовать, в том числе, для проверки решения.

➢ Алгоритм решения двойного интеграла

Систематизируем полученные знания: итак, в каком порядке нужно решать рассматриваемую задачу?

1) Сначала нужно выполнить чертёж. **Без чертежа двойной интеграл не решить**. Точнее, решить можно, но это будет похоже на игру в шахматы вслепую. На чертеже следует изобразить область D, которая представляет собой *плоскую фигуру*. Чаще всего фигура незамысловата и ограничена какими-нибудь прямыми, параболами, гиперболами.

О том, как быстро и грамотно выполнить чертёж, я рассказал в **курсе «Определённые интегралы»**, эта же информация **есть на сайте** *(оперативный способ повторения)*; справочная информация по функциям и графикам – **здесь**.

Итак, этап первый – выполнить чертёж. Далее нужно:

2) Расставить пределы интегрирования и перейти к *повторным интегралам*.

3) Взять внутренний интеграл

4) Взять внешний интеграл и получить ответ (число).

1.2. Область интегрирования и порядок её обхода

В этом параграфе мы рассмотрим **важнейший вопрос** – **как перейти к** *повторным интегралам* **и правильно расставить** *пределы интегрирования*. Как было сказано выше, сделать это можно так:

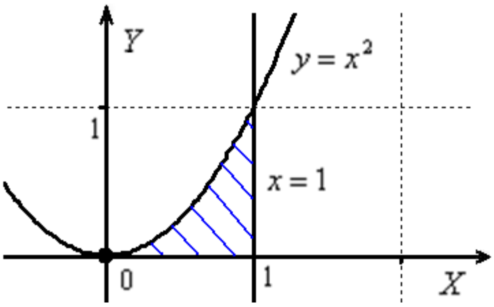
$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_{?}^{?} dx \int_{??}^{??} f(x;y)dy \qquad \text{И так: …}$$

На практике эта вроде бы несложная задача вызывает наибольшие затруднения, и студенты часто путаются в расстановке *пределов интегрирования*. Исправим ситуацию:

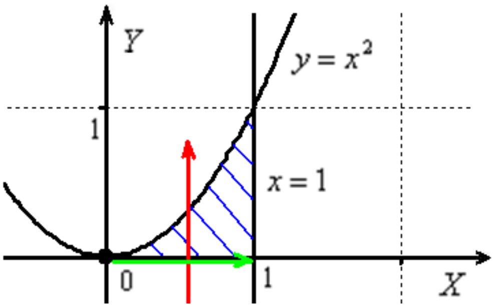
Пример 1

Дан двойной интеграл $\iint_D f(x;y)dxdy$ с областью D: $x=1,\ y=x^2,\ y=0$. Перейти к повторным интегралам и расставить пределы интегрирования двумя способами.

Решение: изобразим *область интегрирования* на чертеже, фигура простейшая:



Теперь я выдам вам орудие труда – ~~палку-копалку~~ лазерную указку. Задача состоит в том, чтобы «просканировать» лучом лазера каждую точку заштрихованной области:



Луч лазера проходит область интегрирования **строго снизу вверх**, то есть указку вы ВСЕГДА держите **ниже** плоской фигуры. Луч входит в область через ось абсцисс, которая задаётся уравнением $y=0$ и выходит из области через параболу $y=x^2$ *(красная стрелка)*. Чтобы просветить всю область, вам нужно **строго слева направо** провести указкой вдоль оси OX от 0 до 1 *(зелёная стрелка)*. **Итак,** «игрек» изменяется от 0 до x^2, а «икс» при этом изменяется от 0 до 1. В задачах сей факт **записывают в виде неравенств**:

$0 \le y \le x^2$

$0 \le x \le 1$

Данные неравенства называют ***порядком обхода области интегрирования*** или просто ***порядком интегрирования***. После того, как мы разобрались с порядком обхода, можно перейти от двойного интеграла к повторным интегралам:

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \ldots$$

Половина задачи решена. Теперь перейдём к *повторным интегралам* **вторым способом**.

➢ Как изменить порядок обхода области?

Для этого нужно найти *обратные функции*. Смотрим на функции, которыми задается область D: $x=1,\ \ y=x^2,\ \ y=0$. Если совсем просто, то перейти к обратным функциям, это значит – выразить «иксы» через «игреки». Единственной функцией, где есть и «икс» и «игрек», является $y=x^2$.

Если $y=x^2$, то $x=\pm\sqrt{y}$, **причём**:
обратная функция $x=\sqrt{y}$ задает правую ветку параболы;
обратная функция $x=-\sqrt{y}$ задает левую ветку параболы.

Нередко возникают сомнения, вот, к примеру, функция $x=\sqrt{y}$ определяет левую или правую ветвь параболы? Сомнения развеять очень просто: возьмите какую-нибудь точку параболы, например, $(1;1)$ (с правой ветви) и подставьте её координаты в любое уравнение, например, в то же уравнение $x=\sqrt{y}$:

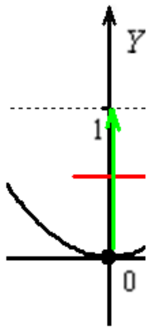
$1=\sqrt{1}$

$1=1$

Получено **верное числовое равенство**, значит, функция $x=\sqrt{y}$ определяет именно правую ветвь параболы, а не левую.

Более того, **такую проверку** (мысленно или на черновике) **желательно проводить всегда** – после того, как вы перешли к обратным функциям. Времени займет всего ничего, а от ошибки убережёт наверняка!

Обойдём область интегрирования вторым способом:



…

Теперь лазерную указку держим горизонтально, **слева** от области интегрирования. Луч лазера проходит область **строго слева направо**. В данном случае он входит в область через ветвь параболы $x=\sqrt{y}$ и выходит из области через прямую, которая задана уравнением $x=1$ *(красная стрелка)*. Чтобы просканировать лазером всю область, нужно провести указкой вдоль оси OY **строго снизу вверх** от 0 до 1 *(зелёная стрелка)*.

Таким образом:
«икс» изменяется от $\sqrt{y}$ до 1,
а «игрек» при этом изменяется от 0 до 1.

Запишем *порядок обхода области* в виде неравенств:

$\sqrt{y} \le x \le 1$

$0 \le y \le 1$

И, следовательно, переход к повторным интегралам таков:

$$\iint\limits_D f(x;\,y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^1 f(x;\,y)dx$$

Ответ можно записать следующим образом:

$$\iint\limits_D f(x;\,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x;\,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^1 f(x;\,y)dx$$

Напоминаю, что окончательный результат вычислений не зависит от того, какой порядок обхода области мы выбрали (поэтому поставлен знак равенства). Но, до конечного результата ещё далеко, сейчас наша задача – **лишь правильно расставить пределы интегрирования**.

Пример 2

Дан двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;\,y)dxdy$, где область D ограничена линиями $x = 3,\ \ y = 0,\ \ y = 1 - x$. Перейти к повторным интегралам и расставить пределы интегрирования двумя способами.

Это пример для самостоятельного решения. Грамотно постройте чертёж и **строго соблюдайте направления обхода** (откуда и куда светить лазерной указкой). Примерный образец чистового оформления задачи в конце книги.

Чаще всего типовое задание встречается немного в другой формулировке:

Пример 3

Построить область интегрирования и изменить порядок интегрирования

$$\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{x+2}^{\sqrt{4-x^2}} f(x;y)dy$$

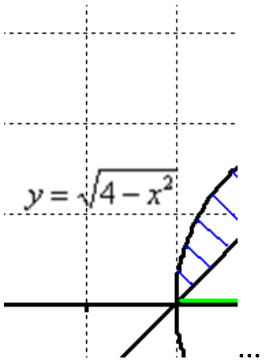
По условию, дан первый способ обхода области, и **решение** опять начинается с чертежа. Здесь область D не лежит на «блюдечке с голубой каёмочкой», но построить её не составляет особого труда. Сначала «снимаем» функции с пределов интегрирования: $y = x + 2,\ y = \sqrt{4 - x^2}$. Функция $y = x + 2$, понятно, задаёт прямую, но что задаёт функция $y = \sqrt{4 - x^2}$? Давайте её немного преобразуем, возведя обе части в квадрат:

$y^2 = 4 - x^2 \ \Rightarrow\ y^2 + x^2 = 2^2$ – окружность с центром в начале координат радиуса 2.

Функция же $y = \sqrt{4 - x^2}$ задаёт верхнюю полуокружность (не забываем, что если есть сомнения, то всегда можно подставить точку лежащую на верхней или нижней полуокружности).

Смотрим на пределы внешнего интеграла: «икс» изменяется от –2 до 0.

Итак, изобразим на чертеже прямую $y = x + 2$, полуокружность $y = \sqrt{4 - x^2}$ и снова посмотрим на исходные повторные интегралы $\int_{-2}^{0} dx \int_{x+2}^{\sqrt{4-x^2}} f(x; y)dy$. Луч лазера входит в область D **вертикально снизу** через прямую и выходит из области через полуокружность *(красная стрелка)*, при этом лазерную указку нам нужно переместить **слева направо** вдоль ось OX от –2 до 0 *(зелёная стрелка)*. И, исходя из этой замечательной логики, штрихуем искомую область синим цветом:



...

Теперь нужно изменить *порядок обхода области*, для этого перейдем к обратным функциям (выразим «иксы» через «игреки»): $y = x + 2 \Rightarrow x = y - 2$.

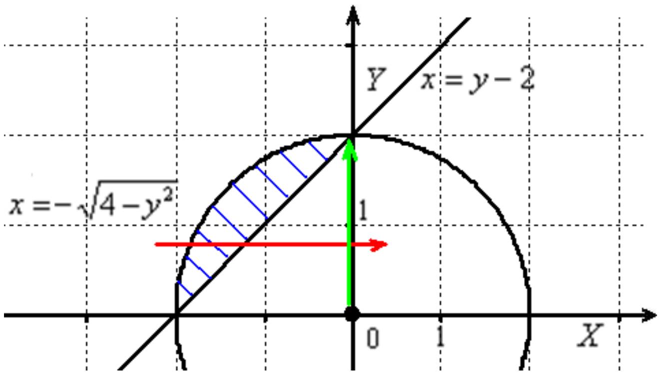
Недавно мы преобразовали функцию $y = \sqrt{4 - x^2}$ к уравнению окружности $y^2 + x^2 = 4$, и сейчас нам нужно выразить «икс»: $y^2 + x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 - y^2$. В результате получаем две обратные функции:

$x = \sqrt{4 - y^2}$ – определяет правую полуокружность;

$x = -\sqrt{4 - y^2}$ – определяет левую полуокружность.

Опять же, если возникают сомнения, возьмите любую точку окружности и выясните, где лево, а где право.

Изменим порядок обхода области. Согласно второму способу обхода, луч лазера входит в область **слева** через левую полуокружность $x = -\sqrt{4 - y^2}$ и выходит **справа** через прямую $x = y - 2$ *(красная стрелка)*. В то же время лазерная указка проводится вдоль оси ординат **снизу вверх** от 0 до 2 *(зелёная стрелка)*.



Таким образом, порядок обхода области:

…

и, в общем-то, можно записать **ответ:** $\int_{-2}^{0} dx \int_{x+2}^{\sqrt{4-x^2}} f(x; y)dy = \int_{0}^{2} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{y-2} f(x; y)dx$

Пример 4

Построить область интегрирования и изменить порядок интегрирования
$$\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt[3]{y+1}}^{-y-1} f(x;\, y)dx$$

Это пример для самостоятельного решения. Пример не очень сложный, но обратите внимание, что порядок обхода изначально задан вторым способом! Что делать в подобных случаях? Во-первых, возникает трудность с чертежом, поскольку чертить график обратной функции наподобие $x = -\sqrt[3]{y+1}$ непривычно даже мне самому. Я рекомендую следующий порядок действий: сначала из $x = -\sqrt[3]{y+1}$ получаем «обычную» функцию (выражаем «игрек» через «икс»). Далее строим график этой «обычной» функции (всегда можно построить хотя бы поточечно). Аналогично поступаем с более простой линейной функцией: из $x = -y-1$ выражаем «игрек» и проводим прямую.

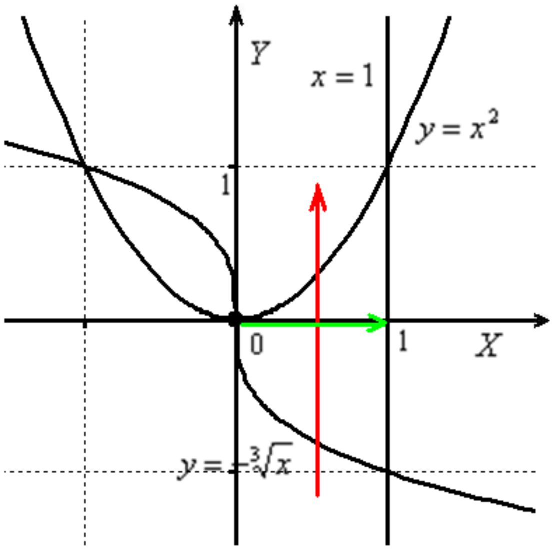
Анализируем исходные пределы интегрирования: входим слева в область через $x = -\sqrt[3]{y+1}$ и выходим через $x = -y-1$. При этом все дела происходят в «игрековой» полосе от –1 до 0. После того, как вы определили на чертеже область интегрирования, сменить порядок обхода не составит особого труда. Примерный образец оформления решения в конце книги. Похожий пример будет разобран подробнее чуть позже.

И сейчас внимание! Даже если вы всё отлично поняли, **не торопитесь переходить непосредственно к вычислениям двойного интеграла**. Порядок обхода – вещь коварная, и очень важно немного набить руку на данной задаче, тем более, я ещё не всё рассказал:

Пример 5

Изменить порядок интегрирования
$$\int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt[3]{x}}^{x^2} f(x;\, y)dy$$

Решение: запишем функции $y = x^2$, $y = -\sqrt[3]{x}$ и выполним чертёж. График второй функции представляет собой кубическую параболу, которая «лежит на боку»:



Порядок обхода области, соответствующий исходным повторным интегралам, обозначен стрелками. **Ещё раз посмотрИте на пределы интегрирования и мысленно просканируйте область лазером!**

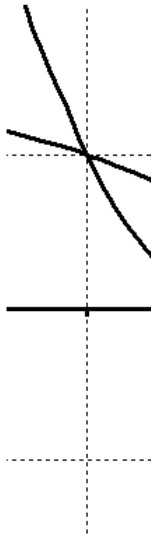
Также обратите внимание, что в ходе выполнения чертежа у нас прорисовалась еще одна ограниченная фигура (левее оси OY). Поэтому следует быть внимательным при определении области интегрирования – за область можно ошибочно принять **не ту** фигуру!

Перейдем к обратным функциям:

$y = x^2 \Rightarrow \quad x = \sqrt{y}$ – нужная нам правая ветвь параболы;

$y = -\sqrt[3]{x} \quad \Rightarrow \quad y^3 = -x \quad \Rightarrow \quad x = -y^3$.

Изменим порядок обхода области. Как вы помните, при втором способе обхода, область нужно сканировать лазерным лучом горизонтально – **слева направо**. Но тут наблюдается интересная вещь:



Как поступать в подобных случаях? В таких случаях область интегрирования нужно разделить на две части и для каждой части составить свои *повторные интегралы*:

1) Если «игрек» изменяется от –1 до 0 *(зеленая стрелка)*, то луч входит в область через кубическую параболу $x = -y^3$ и выходит через прямую $x = 1$ *(красная стрелка)*. Поэтому порядок обхода области будет следующим:

$$-y^3 \le x \le 1$$
$$-1 \le y \le 0$$

И соответствующие повторные интегралы: $\int_{-1}^{0} dy \int_{-y^3}^{1} f(x;y)dx$

2) Если «игрек» изменяется от 0 до 1 *(голубая стрелка)*, то луч входит в область через ветвь параболы $x = \sqrt{y}$ и выходит через ту же прямую $x = 1$ *(малиновая стрелка)*. Следовательно, порядок обхода области будет следующим:

$$\sqrt{y} \le x \le 1$$
$$0 \le y \le 1$$

И соответствующие повторные интегралы: …

У интегралов (кратных в частности) есть весьма удобное ***свойство аддитивности***, то есть, их можно сложить, что в данном случае и нужно сделать:

$\int_{-1}^{0} dy \int_{-y^3}^{1} f(x;y)dx + \int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{y}}^{1} f(x;y)dx$ – а вот и наш обход области вторым способом в виде суммы двух интегралов.

Ответ записываем так:

$$\int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt[3]{x}}^{x^2} f(x;y)dy = \int_{-1}^{0} dy \int_{-y^3}^{1} f(x;y)dx + \int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{y}}^{1} f(x;y)dx$$

Какой порядок обхода выгоднее? Конечно тот, который был дан в условии задачи – вычислений будет в два раза меньше!

Пример 6

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x;y)dy$$

Это пример для самостоятельного решения. В нём присутствуют полуокружности, разборки с которыми были подробно рассмотрены в Примере 3. Примерный образец оформления решения в конце книги.

А сейчас обещанная задача, когда изначально задан второй способ обхода области:

Пример 7

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_0^{3y} f(x;y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{4-y^2} f(x;y)dx$$

Решение: когда порядок обхода задан вторым способом, то перед построением чертежа целесообразно перейти к «обычным» функциям. В данном примере присутствуют два пациента для преобразования: $x = 3y$ и $x = 4 - y^2$.

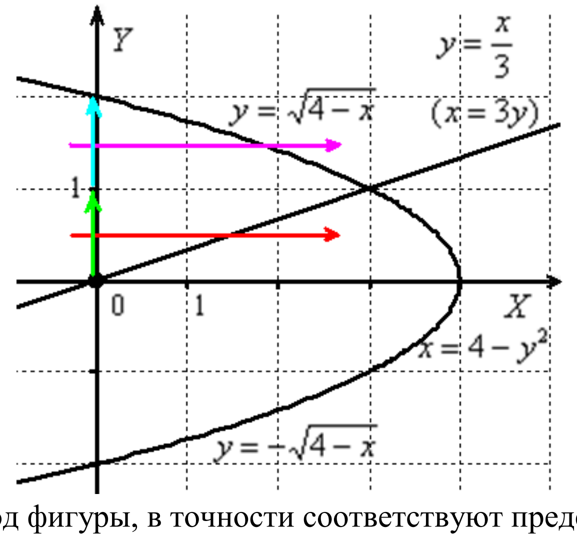
С линейной функцией всё просто: $x = 3y \Rightarrow y = \frac{x}{3}$.

Да и с функцией $x = 4 - y^2$ тоже несложно, её график представляет собой параболу, которая «лежит на боку». Выразим «игрек» через «икс»:

$x = 4 - y^2 \Rightarrow y^2 = 4 - x$

и получаем две ветви: $y = \sqrt{4-x}$ и $y = -\sqrt{4-x}$.

Какую ветку выбрать? Можно провести рассуждения, но проще начертить обе. Даже если вы не сразу понимаете, как они расположены, всегда можно прибегнуть к поточечному методу построения:



Ещё раз обращаю внимание, что на чертеже может получиться несколько плоских фигур, и здесь **крайне важно** выбрать **нужную**! В выборе искомой фигуры помогут *пределы интегрирования* исходных *повторных интегралов*:

…

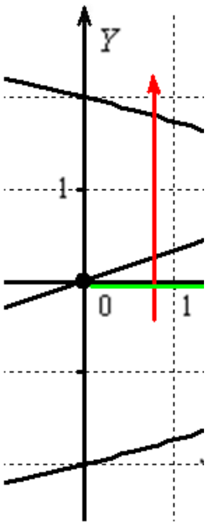
, при этом не забывайте, что обратная функция $x = 4 - y^2$ задаёт **всю** параболу.

Стрелочки, которыми обозначен обход фигуры, в точности соответствуют пределам интегрирования интегралов –

– **ОБЯЗАТЕЛЬНО проведите действия с лазерной указкой мысленно**!

Довольно быстро вы научитесь без труда определять нужную область.

Когда фигура найдена, заключительная часть решения, в общем-то, элементарна, меняем порядок обхода области *(мысленно сканируем лазером!)*:



Обратные функции уже найдены, и искомый *порядок обхода* области таков:

$\frac{x}{3} \le y \le \sqrt{4-x}$

$0 \le x \le 3$

Ответ:

$$\int_0^1 dy \int_0^{3y} f(x;y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{4-y^2} f(x;y)dx =$$

…

$$= \int_0^3 dx \int_{\frac{x}{3}}^{\sqrt{4-x}} f(x;y)dy$$

Финальный пример параграфа для самостоятельного решения:

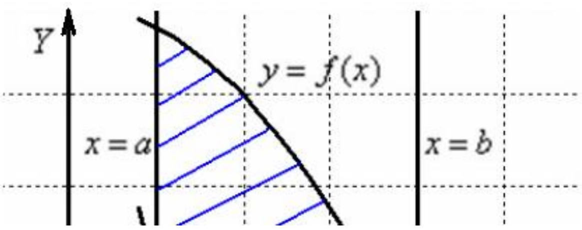
Пример 8

Изменить порядок интегрирования: $\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{2x+1} f(x;y)dy + \int_{1}^{5} dx \int_{-1}^{4-x} f(x;y)dy$

Сверяемся с решением и переходим, наконец, **непосредственно к вычислению двойного интеграла** $\iint_D f(x;y)dxdy$. Начнём с простейшего случая, когда **функция двух переменных** равна единице: $f(x;y)=1$, и это **ещё и особый случай**:

1.3. Как найти площадь плоской фигуры с помощью двойного интеграла?

Двойной интеграл $\iint_D dxdy$ численно равен площади плоской фигуры D (области интегрирования). Сначала рассмотрим задачу в *общем виде*.



А именно вычислим площадь фигуры D, ограниченной линиями $x=a,\ x=b,\ y=f(x),\ y=g(x)$. Для определённости считаем, что $f(x) > g(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Площадь заштрихованной фигуры численно равна $S = \iint_D dxdy$, и сейчас мы «раскрутим» тему.

Выберем первый способ обхода области:

$g(x) \le y \le f(x)$

$a \le x \le b$

Таким образом: $S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g(x)}^{f(x)} dy$

И сразу **важный технический приём:** **повторные интегралы можно считать по отдельности**. Сначала внутренний интеграл, затем – внешний интеграл. Данный способ настоятельно рекомендую «чайникам», да и не только им. Потому что это удобно.

1) Вычислим внутренний интеграл, при этом интегрирование проводится **по переменной «игрек»**:

…

Неопределённый интеграл тут простейший, и далее используется банальная **формула Ньютона-Лейбница**, с той лишь разницей, что **пределами интегрирования являются не числа, а функции**. Сначала подставили в «игрек» (*первообразную функцию*) верхний предел, затем – нижний предел

2) Результат первого пункта нужно подставить во внешний интеграл:

$$\int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Более компактная запись всего решения выглядит так:

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g(x)}^{f(x)} dy = ...$$

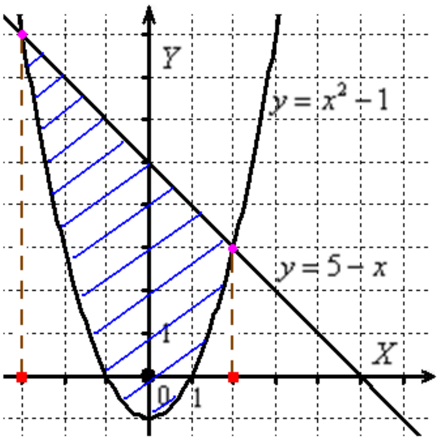
Полученная формула $S = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx$ – это в точности рабочая формула для **вычисления площади плоской фигуры** с помощью обычного определённого интеграла!

То есть, **задача вычисления площади с помощью двойного интеграла мало чем отличается от задачи нахождения площади с помощью определённого интеграла!**

Пример 9

С помощью двойного интеграла, вычислить площадь фигуры D, ограниченной линиями $y = x^2 - 1$, $x + y = 5$

Решение: изобразим область D на чертеже:



Площадь фигуры вычислим с помощью двойного интеграла по формуле:

$$S = \iint\limits_D dxdy$$

Выберем следующий порядок обхода области *(1-й способ)*:

$$x^2 - 1 \le y \le 5 - x$$
$$-3 \le x \le 2$$

Здесь и далее я не буду останавливаться на том, как выполнять обход, т.к. выше были приведены очень подробные разъяснения.

Таким образом:

$$S = \iint_D dxdy = \int_{-3}^{2} dx \int_{x^2-1}^{5-x} dy$$

Как уже отмечалось, начинающим лучше вычислять *повторные интегралы* по отдельности, этого же метода буду придерживаться и я:

1) Сначала разбираемся с внутренним интегралом:

$$\int_{x^2-1}^{5-x} dy = \ldots$$

Здесь мы ВМЕСТО «игрек» сначала подставили *верхний предел интегрирования* $5-x$, а затем – *нижний*: x^2-1. **Если вы запамятовали формулу Ньютона-Лейбница, обязательно найдите её в приложениях!** На всякий случай я приложил к данному курсу ***Справку по интегралам*** и ***Справку по производным***.

2) Результат, полученный на первом шаге, подставляем во внешний интеграл:

$$\int_{-3}^{2}(6-x-x^2)dx = \left(6x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{2} = 12-2-\frac{8}{3}-\left(-18-\frac{9}{2}+9\right) = 10-\frac{8}{3}+9+\frac{9}{2} =$$

$$= 19+\frac{27-16}{6} = 19+\frac{11}{6} = 19+1\frac{5}{6} = 20\frac{5}{6}$$

Пункт 2 – это фактически **нахождение площади плоской фигуры с помощью определённого интеграла**. Обо всех тонкостях решения этой задачи (а их немало) можно ознакомиться по ссылке выше либо в **курсе Определённые и несобственные интегралы**. Это китайское напоминание.

Ответ: $S = 20\frac{5}{6}$ *ед.*^{2}

Несмотря на то, что эту задачу мы неоднократно решали ранее, здесь ещё есть о чём поговорить.

Любопытное задание для самостоятельного решения:

Пример 10

С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = e$, $x = 0$

Примерный образец чистового оформления задачи в конце книги.

В двух предыдущих примерах значительно выгоднее использовать первый способ обхода области, любознательные читатели, кстати, могут изменить порядок обхода и вычислить площади вторым способом. Если не допУстите ошибку, то, естественно, получатся те же самые значения площадей.

Но в ряде случаев более эффективен второй способ обхода области, и в заключение курса молодого «ботана» рассмотрим ещё пару примеров на эту тему:

Пример 11

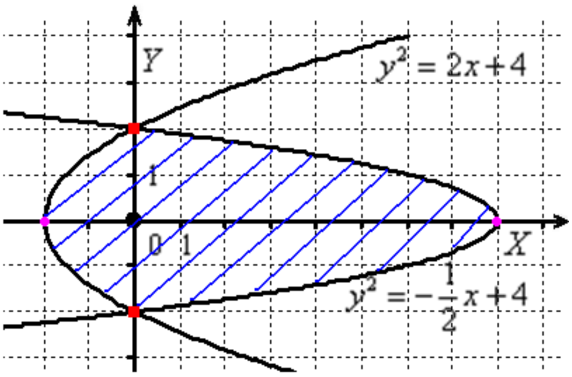
С помощью двойного интеграла, вычислить площадь плоской фигуры D, ограниченной линиями $y^2 = 2x + 4$, $y^2 = -\frac{1}{2}x + 4$

Решение: нас с нетерпением ждут две параболы, которые «лежат на боку». Улыбаться не нужно, похожие вещи в кратных интегралах встречаются частенько.

Представим параболу $y^2 = 2x + 4$ в виде двух функций:
$y = \sqrt{2x+4}$ – верхняя ветвь и $y = -\sqrt{2x+4}$ – нижняя ветвь.

Аналогично, представим параболу $y^2 = -\frac{1}{2}x + 4$ в виде верхней $y = \sqrt{-\frac{1}{2}x + 4}$ и нижней $y = -\sqrt{-\frac{1}{2}x + 4}$ ветвей.

Графики строим поточечно, причём, по причине симметрии, вычислений у нас в два раза меньше. В результате получается вот такая причудливая фигура:



Площадь фигуры вычислим с помощью двойного интеграла по формуле:

$$S = \iint\limits_D dxdy$$

Что будет, если мы выберем первый способ обхода области? Во-первых, данную область придётся разделить на две части. А во-вторых, мы будем наблюдать сию печальную картину: $S = \iint\limits_D dxdy = ...$ (следим по чертежу!!!).

Интегралы, конечно, не «убийственные», но… есть старая математическая присказка: кто с корнями дружен, тому зачёт не нужен.

Поэтому из недоразумения, которое дано в условии, выразим обратные функции:

$$y^2 = 2x + 4 \Rightarrow 2x = y^2 - 4 \Rightarrow x = \frac{y^2}{2} - 2$$

$$y^2 = -\frac{1}{2}x + 4 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 4 - y^2 \Rightarrow x = 8 - 2y^2$$

Обратные функции в данном примере обладают тем преимуществом, что задают **сразу всю параболу целиком** без всяких там веток, корней и прочего дерева.

И, согласно второму способу, обход области будет следующим:

$$\frac{y^2}{2} - 2 \le x \le 8 - 2y^2$$
$$-2 \le y \le 2$$

Таким образом:

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_{-2}^{2}dy\int\limits_{\frac{y^2}{2}-2}^{8-2y^2}dx$$

Как говорится, ощутите разницу.

1) Расправляемся с внутренним интегралом:

$$\int\limits_{\frac{y^2}{2}-2}^{8-2y^2}dx=(x...$$

Результат подставляем во внешний интеграл:

$$2)\ \int\limits_{-2}^{2}\left(10-\frac{5y^2}{2}\right)dy=2\int\limits_{0}^{2}\left(10-\frac{5y^2}{2}\right)dy=\int\limits_{0}^{2}(20-5y^2)dy=\left(20y-\frac{5y^3}{3}\right)\Big|_0^2=$$

$$=40-\frac{40}{3}-(0-0)=\frac{80}{3}=26\frac{2}{3}$$

Интегрирование по переменной «игрек» не должно смущать, была бы буква «зю» – замечательно бы проинтегрировалось и по ней. Также обратите внимание на первый шаг: подынтегральная функция $10-\frac{5y^2}{2}$ является чётной, а отрезок интегрирования симметричен относительно нуля. Поэтому отрезок можно споловинить, а результат – удвоить. Что добавить…. Всё!

Ответ: $S=26\frac{2}{3}$ $ед.^2$

Для проверки своей техники интегрирования можете попробовать вычислить $S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_{-2}^{0}dx\int\limits_{-\sqrt{2x+4}}^{\sqrt{2x+4}}dy+\int\limits_{0}^{8}dx\int\limits_{-\sqrt{-\frac{1}{2}x+4}}^{\sqrt{-\frac{1}{2}x+4}}dy$. Ответ должен получиться точно таким же.

Пример 12

С помощью двойного интеграла, вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{4}{x},\ y=2,\ y=4,\ y=x-1$

Это пример для самостоятельного решения. Интересно отметить, что если вы попробуете использовать первый способ обхода области, то фигуру придётся разделить уже не на две, а на три части! И, соответственно, получится три пары повторных интегралов. Бывает и такое.

Итак, начальный мастер-класс подошёл к завершению, и пора переходить на гроссмейстерский уровень. **Обязательно с хорошим настроением!** – оранжевым настроением – прямо как сейчас у меня, а почему оно такое, я объясню чуть позже:

1.4. Как вычислить произвольный двойной интеграл?

Только что был рассмотрен элементарный случай, когда подынтегральная функция $f(x;\,y)=1$, и сейчас мы начнём «набивать» наш двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;\,y)dxdy$ более разнообразной «начинкой». И у таких интегралов тоже есть свой **геометрический смысл**! Пусть **функция** $z=f(x;\,y)$ существует в каждой точке $(x;\,y)$ плоской области D *(см. рис)*. Геометрически она задаёт некоторую **поверхность** в трёхмерном пространстве. Для определенности считаем, что $f(x;\,y)>0$, то есть поверхность полностью *(это важно!)* расположена **над** плоскостью XOY. Тогда соответствующий двойной интеграл численно равен **объёму** ***цилиндрического бруса*** $\iint\limits_D f(x;\,y)dxdy=V$:

…

Что такое *цилиндрический брус*, думаю, всем понятно из чертежа, который я отсканировал из старого-старого советского учебника. Тем не менее, закомментирую.

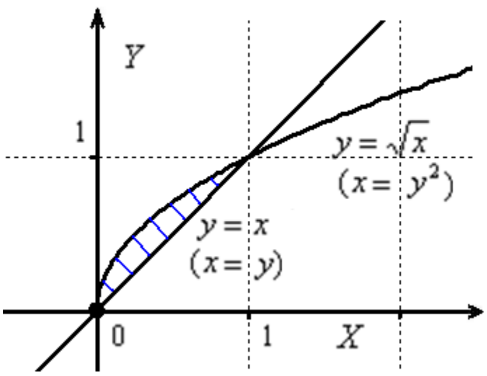
Плоская фигура D (заштрихована на чертеже) полностью лежит в плоскости XOY и *брус* ограничен областью D **снизу**. **Сверху** *брус* как раз ограничен поверхностью $z=f(x;\,y)$, которая представляет собой такую «шапку». Плоская область D по своей границе перпендикулярными **лучами** вырезает из поверхности $z=f(x;\,y)$ эту шапочку. И **сбоку** *брус*, очевидно, ограничен этими лучами. На пунктирные линии внутри и «заплатки» с точками не обращайте внимания, они нужны для подробного изложения теории. Я не стал тереть их в графическом редакторе – вдруг кого заинтересует ☺.

В большинстве практических задач двойной интеграл нужно вычислить **лишь формально**, но для лучшего понимания мы будем неоднократно привлекать смысл:

Пример 13

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xdxdy$, $D: y=\sqrt{x},\ \ y=x$. Изменить порядок интегрирования и вычислить двойной интеграл вторым способом.

Решение: изобразим область интегрирования D на чертеже:



Напоминаю, что выполнение чертежа – **строго показанный начальный этап** решения. За исключением каких-то совсем простых случаев. Они, кстати, тоже будут.

При этом **чертёж крайне важно выполнить правильно и точно**, поскольку ошибка в графике незамедлительно «запорет» всё задание. …О как стращать вас начал ☺.

Выберем первый, «традиционный» *порядок обхода*:

$x \le y \le \sqrt{x}$

$0 \le x \le 1$

Таким образом: $\iint\limits_D xdxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{\sqrt{x}} xdy = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_x^{\sqrt{x}} dy$.

И обратите внимание на следующее действие: здесь можно вынести «икс» из внутреннего интеграла во внешний интеграл. Почему? Во внутреннем интеграле $\int\limits_x^{\sqrt{x}} xdy$ **интегрирование проводится по «игрек», следовательно, «икс» считается константой**. А любую константу можно вынести за знак интеграла, что благополучно и сделано.

С интегралами в который раз и **настоятельно** рекомендую разбираться по пунктам:

1) Используя формулу Ньютона-Лейбница, найдём внутренний интеграл:

$\int\limits_x^{\sqrt{x}} dy = (y)\Big|_x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - x$ – **вместо** «игрека» подставляем функции!

2) Результат, полученный в первом пункте, подставим во внешний интеграл $\int\limits_0^1 xdx$, при этом **ни в коем случае не забываем** про «икс», который там уже находится:

$$\int\limits_0^1 x(\sqrt{x} - x)dx = \int\limits_0^1 (x^{\frac{3}{2}} - x^2)dx = \ldots$$

Выполним вторую часть задания, а именно изменим порядок обхода области и вычислим двойной интеграл вторым способом. Перейдём к обратным функциям:

$y = x \Rightarrow x = y, \quad y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$ и второй порядок обхода:

$y^2 \le x \le y$

$0 \le y \le 1$

Таким образом: $\iint\limits_D xdxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{y} xdx$ – а вот здесь уже «икс» является «родным» для внутреннего интеграла, поэтому его **нельзя** вынести во внешний интеграл.

1) Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислим внутренний интеграл:

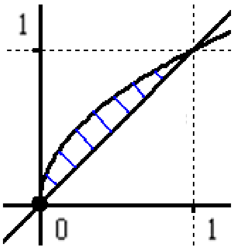
$\int\limits_{y^2}^{y} xdx = \frac{1}{2}(x^2)\Big|_{y^2}^{y} = \frac{1}{2}((y)^2 - (y^2)^2) = \frac{1}{2}(y^2 - y^4)$ – ВМЕСТО «икса» подставляются функции (пределы интегрирования)!

2) Результат, полученный в первом пункте, подставим во внешний интеграл и проведём окончательные вычисления:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (y^2 - y^4)dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \ldots$$

Результаты совпали, значит, задание выполнено верно, **ответ:** $\iint\limits_D xdxdy = \frac{1}{15}$

Дополнительно поясню геометрический смысл разобранного примера. В нём мы рассмотрели двойной интеграл $\iint\limits_D xdxdy$ со следующей областью D:



Подынтегральная функция $z = f(x; y) = x$ задаёт *плоскость* в пространстве, которая расположена над областью D. Теперь из начала координат перпендикулярно экрану монитора мысленно проведите себе в лоб стрелку оси OZ. Точно так же из границы области D направьте на себя перпендикулярные лучи. Эти лучи вырежут кусочек из плоскости $f(x; y) = x$. …Все представили полученный *цилиндрический брус*? Снизу он ограничен заштрихованной областью, сверху – кусочком плоскости и сбоку – лучами.

Полученный в задаче результат $\iint\limits_D xdxdy = \frac{1}{15}$ численно равен объёму этого бруса. Такой вот маленький брусочек. Впрочем, «маленький» – понятие относительное ☺.

Если двойной интеграл получился положительным, это означает, что соответствующее пространственное тело («брус») полностью или бОльшей *(по объёму)* частью лежит **над** областью D (выше плоскости XOY). Следует заметить, что частный случай $f(x; y) = 1$ интерпретируется не только как площадь области D, но и как объём соответствующего бруса единичной высоты.

Двойной интеграл может быть отрицательным, в таких случаях график функции $z = f(x; y)$ полностью (или бОльшей частью) лежит **под** областью D. Это тоже объем тела, только со знаком минус, поскольку поверхность полностью (или бОльшей частью) лежит **под** координатной плоскостью XOY.

И особый случай, нулевой: $\iint\limits_D f(x; y)dxdy = 0$. Такое бывает, когда область D представляет собой *линию* на плоскости или даже точку. Или же часть бруса лежит над областью D *(не ниже плоскости* XOY*)* и **такая же по объёму часть** – под областью *(не выше* XOY*)*. В этом случае объёмы формально взаимоуничтожают друг друга.

Задание для самостоятельного решения.

Пример 14

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D 2ydxdy$, $D: y = -x^3,\ y = 1,\ x = 0$ Выполнить проверку, изменив порядок интегрирования и вычислив двойной интеграл 2-м способом.

Если есть время, старайтесь всегда выполнять такую проверку, даже если этого не требуется в условии

Вычислили интеграл одним способом – затем изменили порядок обхода области и вычислили вторым способом. Очень хорошо, если у вас под рукой есть калькулятор, на котором можно считать обыкновенные дроби, он значительно ускорит вычисления. А если нет, ничего страшного, к настоящему курсу я приложил фирменный и улучшенный «дробовик» проекта.

Примерный образец чистового оформления примера в конце книги.

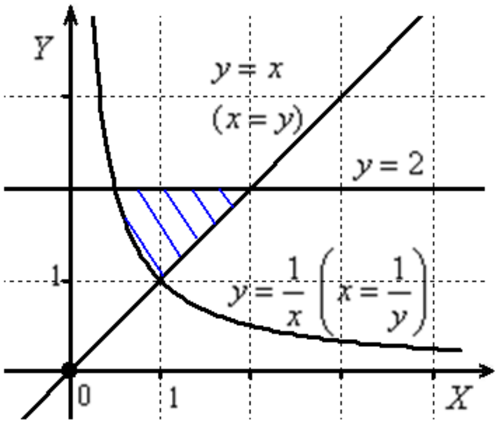
Продолжаем совершенствовать технику вычислений:

Пример 15

Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D \frac{y^2}{x^2}dxdy\,,\ D: y=x,\ xy=1,\ y=2$$

Решение: изобразим область интегрирования на чертеже:



После того, как **корректно** выполнен чертеж и **правильно (!)** определена область интегрирования, самое время разобраться с порядком обхода.

Согласно первому способу, область придётся разделить на две части, при этом необходимо будет вычислить следующие интегралы:

$$\iint_D \frac{y^2}{x^2}dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{\frac{1}{x}}^{2}\frac{y^2}{x^2}dy + \int_{1}^{2}dx\int_{x}^{2}\frac{y^2}{x^2}dy$$

Приятного, так скажем, мало. Проанализируем, а не проще ли использовать второй способ обхода области? Перейдем к обратным функциям, переход здесь элементарен:

$y = x \ \Rightarrow\ x = y;$

$y = \frac{1}{x} \ \Rightarrow\ x = \frac{1}{y}.$

Таким образом, порядок обхода области:

$\frac{1}{y} \le x \le y$

$1 \le y \le 2$

и соответствующие *повторные интегралы*:

… – ну вот, совсем другое дело.

И снова заметьте, что во внутреннем интеграле интегрирование осуществляется по «икс», поэтому константу y^2 можно сразу вынести во внешний интеграл

1) Найдём внутренний интеграл:

$$\int_{1/y}^{y}\frac{dx}{x^2} = -\left(\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{1/y}^{y} = -\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\frac{1}{y}}\right) = -\left(\frac{1}{y} - y\right) = y - \frac{1}{y}$$

Всё-таки подстановка пределов интегрирования, порой, выглядит своеобразно. Сначала ВМЕСТО «икса» мы подставили верхний предел интегрирования y, затем ВМЕСТО «икса» подставили нижний предел интегрирования $\frac{1}{y}$. **Будьте внимательны при подстановках!** И **на всякий пожарный** – **действия с многоэтажными дробями**.

2) Результат предыдущего пункта подставим во внешний интеграл, **при этом не забываем про y^2, который там уже находится**:

$$\int_1^2\left(y-\frac{1}{y}\right)y^2dy=\int_1^2(y^3-y)dy=\left(\frac{y^4}{4}-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2=4-2-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=2+\frac{1}{4}=2\frac{1}{4}$$

Ответ: $\iint\limits_D\frac{y^2}{x^2}dxdy=2\frac{1}{4}$

Для тренировки можете попробовать вычислить интеграл менее рациональным способом: $\iint\limits_D\frac{y^2}{x^2}dxdy=\ldots$. Результаты должны совпасть.

Пример 16

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D x^2ydxdy$, $D: y=2-x,\ y=x,\ x=0$

Самостоятельно постройте область D и проанализируйте, какой способ обхода области выгоднее использовать. Полное решение и ответ в конце книги.

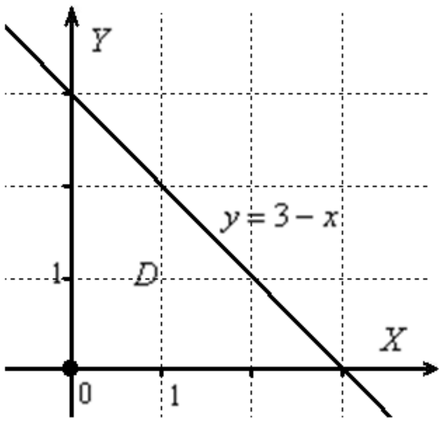
Усложняем задачу, теперь *подынтегральная функция* будет представлять собой сумму. Рассмотрим еще два примера, где я остановлюсь на приёме вычисления интеграла, который типичен и эффективен для кратных интегралов:

Пример 17

Вычислить двойной интеграл
$\iint\limits_D(2x+y)dxdy$, $D: x+y=3,\ y=0,\ x=0$

И сразу отметим то, чего делать не нужно – в данном случае не следует использовать *свойство линейности* кратного интеграла и представлять его в виде:
$\iint\limits_D(2x+y)dxdy=\ldots$ …Почему? Вычислений заметно прибавится!

Решение: область D незамысловата, даже штриховать не буду:



В данном примере, как легко заметить, порядок интегрирования не имеет особого значения, поэтому выберем первый, более привычный вариант обхода области:

$0\le y\le 3-x$

$0\le x\le 3$

Таким образом:

$\iint\limits_D(2x+y)dxdy=\int_0^3dx\int_0^{3-x}(2x+y)dy$, и здесь, в отличие от двух предыдущих примеров, **из внутреннего интеграла ничего вынести нельзя**, поскольку начинкой является сумма.

С повторными интегралами опять разбираемся по отдельности:

1) Сначала берём внутренний интеграл:
$$\int_0^{3-x}(2x+y)dy=\left(2xy+\frac{y^2}{2}\right)...$$

И тут речь зашла о *частном интегрировании*: **если интегрирование проводится по «игрек», то переменная «икс» считается константой. И наоборот.**

Перед использованием формулы Ньютона-Лейбница строго рекомендована проверка, найдём **частную производную** по «игрек»:

$\left(2xy+\frac{y^2}{2}\right)'_y=2x\cdot(y)'_y+\frac{1}{2}\cdot(y^2)'_y=2x\cdot1+\frac{1}{2}\cdot2y=2x+y$ – в результате получена исходная *подынтегральная функция*, значит, всё в порядке.

И только после этого подставляем пределы интегрирования – сначала ВМЕСТО «игреков» мы подставили $3-x$, а затем – нижний предел (нули). **После подстановки должны остаться только «иксы».**

И, наконец, такой вопрос – почему я оставил результат в виде $6x-2x^2+\frac{(3-x)^2}{2}$?

Ведь можно раскрыть скобки и привести подобные слагаемые! В данном случае это сделать несложно, и «чайникам», вероятно, лучше так и поступить. Но если будет не вторая, а 3-я или 4-я степень? На самом деле **линейную функцию в степени выгоднее проинтегрировать, не раскрывая скобок!** Данный приём я уже применял и подробно комментировал в теме *Определённые интегралы* при нахождении **объёма тела вращения**.

Ещё раз посмотрим, как он работает:

2) Берём оставшийся внешний интеграл:
$$\int_0^3\left(6x-2x^2+\frac{(3-x)^2}{2}\right)dx=\int_0^3(6x-2x^2)dx+\frac{1}{2}\int_0^3(3-x)^2dx=$$
$$=\left(3x^2-\frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^3-\frac{1}{2}\int_0^3(3-x)^2d(3-x)=27-18-0+0-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(3-x)^3\Big|_0^3=$$
$$=9-\frac{1}{6}(0-27)=9+\frac{9}{2}=\frac{27}{2}=13\frac{1}{2}$$

При нахождении интеграла $\int_0^3(3-x)^2dx$ использован **метод подведения функции под знак дифференциала**. **Перед подстановкой пределов интегрирования для проверки** берём «обычные» производные $\left(3x^2-\frac{2x^3}{3}\right)'_x=3\cdot2x-\frac{2}{3}\cdot3x^2=6x-2x^2$ и:

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}((3-x)^3)'_x=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot3(3-x)^2\cdot(3-x)'=\frac{1}{2}(3-x)^2\cdot(0-1)=-\frac{1}{2}(3-x)^2$$

Ответ: $\iint_D(2x+y)dxdy=\frac{27}{2}=13\frac{1}{2}$

Пример 18

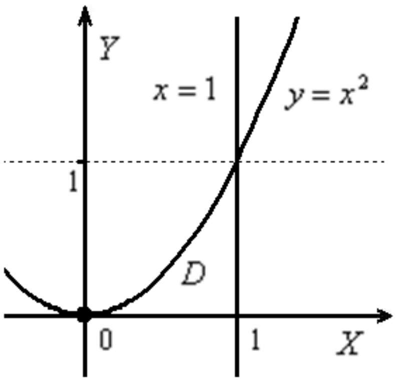
Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (2y^3 - x)dxdy$, $D: y = x+2,\ y=0,\ x=0$

Это пример для самостоятельного решения. В образце, как и в разобранном примере выше, использован первый способ обхода области. Но это ещё далеко и далеко не всё. **Не пропускаем (!)** нижеследующие задачи ;)

Пример 19

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (xy - 4x + 2y - 1)dxdy$, $D: x=1,\ y = x^2,\ y=0$

Решение: область интегрирования тут простая, и основной гемор ожидается как раз в вычислениях:



Выберем привычный порядок обхода области:

$0 \le y \le x^2$

$0 \le x \le 1$

Таким образом:

$$\iint\limits_D (xy - 4x + 2y - 1)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (xy - 4x + 2y - 1)dy$$

С интегралами разделаемся по отдельности:

1) Интегрируем внутренний интеграл по «игрек» («икс» считается константой):

$$\int_0^{x^2} (xy - 4x + 2y - 1)dy = \ldots$$

Перед подстановкой пределов интегрирования **обязательно выполняем проверку**, а именно берём *частную производную* по «игрек»:

$$\left(\frac{xy^2}{2} - 4xy + y^2 - y\right)'_y = \frac{x}{2}\cdot(y^2)'_y - 4x(y)'_y + (y^2)'_y - (y)'_y = \frac{x}{2}\cdot 2y - 4x\cdot 1 + 2y - 1 =$$

$= xy - 4x + 2y - 1$ – в результате получена исходная подынтегральная функция, ОК.

Далее. Будьте ПРЕДЕЛЬНО внимательны в подстановке *пределов интегрирования*: сначала ВМЕСТО «игреков» подставляем x^2, затем – ноль. При оформлении решения вполне допустимо записать один, а не несколько нолей, как это сделано в этом примере. **После интегрирования по «игрек» и подстановок должны остаться только «иксы»!**

2) Подставляем «иксовый трофей» во внешний интеграл:

$$\int_0^1 \left(\frac{x^5}{2} - 4x^3 + x^4 - x^2\right)dx = \left(\frac{x^6}{12} - x^4 + \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{12} - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} - 0 = -\frac{21}{20}$$, **готово**.

Да, **не забываем** о промежуточной проверке:

$$\left(\frac{x^6}{12} - x^4 + \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right)'_x = \frac{6x^5}{12} - 4x^3 + \frac{5x^4}{5} - \frac{3x^2}{3} = \frac{x^5}{2} - 4x^3 + x^4 - x^2$$, ОК.

Теперь решим задачу вторым способом, тут есть о чём поговорить. Перейдём к обратной функции $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$ и изменим порядок обхода области:

$$\sqrt{y} \le x \le 1$$
$$0 \le y \le 1$$

Таким образом:

$$\iint_D (xy - 4x + 2y - 1)dxdy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 (xy - 4x + 2y - 1)dx$$

1) Интегрируя по «икс» («игрек» – константа), вычислим внутренний интеграл:

$$\int_{\sqrt{y}}^1 (xy - 4x + 2y - 1)dx = \left(\frac{x^2 y}{2} - 2x^2 + 2xy - x\right)\Bigg|_{\sqrt{y}}^1 = \frac{y}{2} - 2 + 2y - 1 - \left(\frac{y^2}{2} - 2y + 2\sqrt{y}y - \sqrt{y}\right) =$$

$$= \frac{5y}{2} - 3 - \frac{y^2}{2} + 2y - 2y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = \frac{9y}{2} - 3 - \frac{y^2}{2} - 2y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$$

Обязательная промежуточная проверка, берём *частную производную* по «икс»:

$$\left(\frac{x^2 y}{2} - 2x^2 + 2xy - x\right)'_x = \frac{y}{2} \cdot (x^2)'_x - 2 \cdot (x^2)'_x + 2y \cdot (x)'_x - (x)'_x =$$

$= \frac{y}{2} \cdot 2x - 2 \cdot 2x + 2y \cdot 1 - 1 = xy - 4x + 2y - 1$ – получена подынтегральная функция.

Подстановка пределов интегрирования здесь сложнее: сначала **вместо** «иксов» подставляем 1, затем **вместо** «иксов» подставляем $\sqrt{y}$. **После интегрирования по «икс» и подстановок пределов интегрирования должны остаться только «игреки»**. Степени рекомендую оставить в виде $y^{\frac{a}{b}}$, а **не преобразовывать их в корни** – будет удобнее интегрировать на втором шаге:

2) Подставляем «игрековый трофей» во внутренний интеграл и интегрируем по y:

$$\int_0^1 \left(\frac{9y}{2} - 3 - \frac{y^2}{2} - 2y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)dy = \ldots$$

$= \frac{9}{4} - 3 - \frac{1}{6} - \frac{4}{5} + \frac{2}{3} - 0 = -\frac{21}{20}$ – результаты совпали, как оно и должно быть. Легко заметить, что первый способ решения был заметно проще.

Всегда перед решением анализируйте – какой путь легче и короче

Ответ: $\iint_D (xy - 4x + 2y - 1)dxdy = -\frac{21}{20}$

Результат получился отрицательным. Геометрически это обозначает, что график подынтегральной функции $f(x; y) = xy - 4x + 2y - 1$ (поверхность в пространстве) полностью или бОльшей частью (не проверял) располагается ниже области интегрирования D под плоскостью XOY.

Другой технический момент касается дробей. Дроби в рассмотренном примере еще худо-бедно можно привести к общему знаменателю вручную. Но не удивляйтесь, если на практике получится ответ вроде $\frac{131}{945}$, по крайне мере, в своей коллекции я нашел немало диких примеров, где без калькулятора-«дробовика» фактически не обойтись. Ещё раз напоминаю, что он приложен к этой книге.

Пример 20

Вычислить двойной интеграл по области $D: x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2$

$$\iint_D (12xy+9x^2y^2)dxdy$$

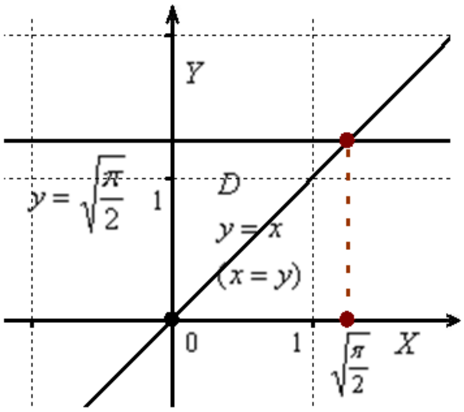
Решаем и ни в коем случае не останавливаемся:

Пример 21

Вычислить двойной интеграл по области $D: x=0,\ y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ y=x$

$$\iint_D 4y^2\sin xydxdy$$

Решение: в ходе выполнения чертежа может возникнуть трудность с построением *прямой* $y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, которая параллельна оси OX. Ничего сложного: если $\pi\approx 3{,}14$, то $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\approx 1{,}25$ – примерно на этом уровне и следует провести прямую:



После выполнения чертежа нужно выяснить, какой порядок обхода области выгоднее применить.

Рассмотрим первый способ обхода:

$$x\le y\le\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$0\le x\le\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Тогда:

$$\iint_D 4y^2\sin xydxdy=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}dx\int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}4y^2\sin xydy=...$$

Очевидно, что первый способ является крайне неудачным, поскольку внутренний интеграл $\int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}y^2\sin xydy$ придётся дважды **брать по частям**.

Но есть альтернатива!

Выберем второй способ обхода области:

$0 \le x \le y$

$0 \le y \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Следовательно: $\iint\limits_D 4y^2 \sin xydxdy = \int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} dy \int\limits_0^y 4y^2 \sin xydx = ...$

Выглядит гораздо привлекательнее, начинаем вычисления:

1) По формуле Ньютона-Лейбница разберёмся с внутренним интегралом:

$$\int\limits_0^y \sin xydx = -\frac{1}{y}(\cos xy)\Big|_0^y = -\frac{1}{y}(\cos(y \cdot y) - \cos(0 \cdot y)) = -\frac{1}{y}(\cos y^2 - 1) = \frac{1}{y}(1 - \cos y^2)$$

Когда мы интегрируем по «икс», переменная «игрек» считается константой. Если возникают трудности с интегрированием, можно прибегнуть даже к такому способу: на черновике временно замените «игрек» конкретным числом, например, «пятёркой»:

$$\int \sin 5xdx = \frac{1}{5}\int \sin 5xd(5x) = \frac{1}{5}(-\cos 5x) = -\frac{1}{5}\cos 5x.$$

Теперь замените «пятёрку» обратно – «игреком»: $-\frac{1}{y}\cos xy$

И, конечно же, проверка дифференцированием по «икс»:

$$\left(-\frac{1}{y}\cos xy\right)'_x = -\frac{1}{y}\cdot(\cos xy)'_x = -\frac{1}{y}\cdot(-\sin xy)\cdot(xy)'_x = \frac{1}{y}\cdot \sin xy \cdot y = \sin xy$$

Далее при подстановке пределов интегрирования сначала **вместо** «икса» подставляем y, затем – ноль. **После подстановки должны остаться только «игреки»**.

2) Полученный результат $\frac{1}{y}(1 - \cos y^2)$ перемещаем во внешний интеграл, **не забывая**, что **там уже есть** y^2 и константа 4, после чего интегрируем «по игрек»

$$4\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2 \cdot \frac{1}{y}(1 - \cos y^2)dy = 4\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y(1 - \cos y^2)dy = 4\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} (y - y\cos y^2)dy =$$

$$= 4\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} ydy - 4\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y\cos y^2 dy = ...$$

$$= 2\left(\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 - 0^2\right) - 2(\sin y^2)\Big|_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = 2\cdot\frac{\pi}{2} - 2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \pi - 2(1 - 0) = \pi - 2$$

Второй интеграл взят **методом подведения функции под знак дифференциала**.

Ответ: $\iint\limits_D 4y^2 \sin xydxdy = \pi - 2$

Таким образом, **выбор порядка обхода иногда зависит не только от самой области интегрирования, но и от подынтегральной функции**.

Пример 22

Вычислить двойной интеграл $\iint_D y^2 e^{-\frac{xy}{8}} dxdy$ по области $D: x=0,\ y=2,\ y=\frac{x}{2}$

Решаем самостоятельно. …А теперь признАйтесь, вам так же хорошо, как мне? ☺ Это мудрое пожелание я всегда высказываю своим ученикам, но они почему-то смеются – хорошо должно быть каждый день! И даже если всё не очень, то к этому состоянию духа нужно непременно стремиться. Изучим **ещё один важный метод решения**:

1.5. Как вычислить двойной интеграл в полярных координатах?

Типовое задание формулируется примерно так: «Вычислить двойной интеграл, используя **полярную систему координат**». После чего для решения предлагается… обычный двойной интеграл $\iint_D f(x;\ y)dxdy$ в декартовых координатах по области D.

Сначала рассмотрим более простой и распространённый случай, когда подынтегральная *функция двух переменных* $f(x;\ y)=1$ и двойной интеграл $\iint_D dxdy$ численно равен площади области интегрирования. Разберём алгоритм решения на бесхитростной демо-задаче:

Пример 23

Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченную линиями $x^2+y^2-2y=0,\ x=0\ (x\ge 0)$, с помощью двойного интеграла, используя полярную систему координат

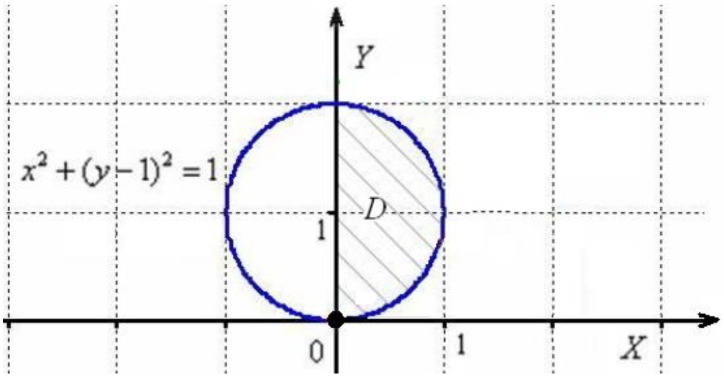
На первом этапе **решения** ничего нового. Выполняем чертёж области D в прямоугольной системе координат. **Линейное неравенство** $x\ge 0$ определяет правую полуплоскость, включая ось OY $(x=0)$, а уравнение $x^2+y^2-2y=0$, очевидно, задаёт какую-то **линию 2-го порядка**. Чтобы выяснить, какую – *выделим полный квадрат*:

$x^2+y^2-2y=0$

$x^2+y^2-2y+1-1=0$

$x^2+(y-1)^2=1$ – *окружность* единичного радиуса с центром в точке $(0;1)$.

Таким образом, нам нужно вычислить площадь половинки круга:



Не упустим возможность сразу узнать ответ. По школьной формуле площади круга, должно получиться:

$S=\frac{1}{2}\cdot\pi r^2=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1^2=\frac{\pi}{2}$ *ед.*^{2}

Площадь фигуры

стандартно рассчитывается по формуле $S = \iint\limits_D dxdy$, однако по условию нужно воспользоваться *полярными координатами*. **При переходе к полярной системе координат произведение дифференциалов** ВСЕГДА **превращается в следующую вещь**: $dxdy = rdrd\varphi$

То есть, от интегрирования по декартовым «иксу» и «игреку» мы перешли к интегрированию по полярному радиусу «эр» и полярному углу «фи». Обратите внимание на появившийся множитель r, образно говоря, это «плата за переход», любители вышмата могут погуглить ***якобиан перехода*** *к полярным координатам*. **Практическая же сторона вопроса состоит в том, что этот множитель «эр» терять нельзя**.

Таким образом: $\iint\limits_D dxdy = \iint\limits_D rdrd\varphi$

Но это ещё не всё – ведь границы области D тоже заданы в декартовой системе. Используем **формулы перехода к полярным координатам** $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Ось ординат не трогаем, а вот окружность $x^2 + y^2 - 2y = 0$ потревожим:

$(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 - 2r\sin\varphi = 0$

$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - 2r\sin\varphi = 0$

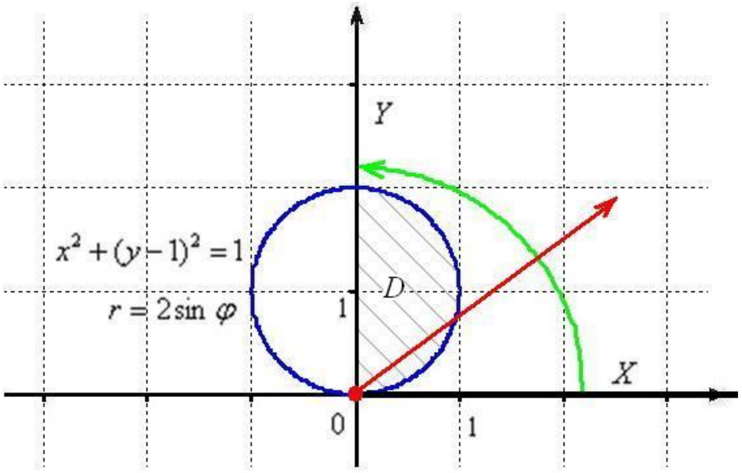
$r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - 2r\sin\varphi = 0$, *основное тригонометрическое тождество*:

$r^2 - 2r\sin\varphi = 0$ и сокращаем на «эр»:

$r - 2\sin\varphi = 0$

$r = 2\sin\varphi$ – что и говорить, гораздо более приятное уравнение окружности.

Сведём двойной интеграл $\iint\limits_D rdrd\varphi$ к *повторным интегралам*. Для этого нужно выяснить *порядок обхода области*. Недавно мы орудовали лазерной указкой, а сейчас будет удачна другая ассоциация – просвечивание области D радаром. Представьте, что из *полюса* O исходит красный луч света и вращается **против часовой стрелки**:



Когда луч радара поворачивается от *полярной оси* $\alpha = 0$ до угла $\beta = \frac{\pi}{2}$ *рад. (зелёная стрелка)*, то он **входит** в область D непосредственно из полюса O (начиная со значения $r = 0$) и **выходит** из неё через окружность $r = 2\sin\varphi$ *(красная стрелка)*. Таким образом, на промежутке $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ *полярный радиус* изменяется в пределах $0 \le r \le 2\sin\varphi$, и область интегрирования полностью «просканирована».

В результате: $S = \iint\limits_D dxdy = ...$ – множитель r, разумеется, уходит во внутренний интеграл, где осуществляется интегрирование по «эр».

И здесь я **вновь рекомендую оформлять решение в два пункта**:

1) Сначала возьмём внутренний интеграл:

$$\int_0^{2\sin\varphi} rdr = ...$$

2) Подставляем трофей во внешний интеграл и используем популярную *формулу понижения степени* $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$:

$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi d\varphi = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\varphi)d\varphi = ...$ что и требовалось получить (вспоминаем вычисления по школьной формуле).

Ответ: $S = \frac{\pi}{2}$ $ед.^2 \approx 1{,}57$ $ед.^2$

В простых случаях, как этот, вычисления можно оформить и «одной строкой»:

$$S = \iint_D dxdy = \iint_D rdrd\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} rdr = ... =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi d\varphi = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\varphi)d\varphi = \left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 - (0-0) = \frac{\pi}{2}$$

К слову, совсем забыл привести такое решение для случая декартовых координат, решим «быстрым» способом, скажем, простенький Пример 13:

$$\iint_D xdxdy = \int_0^1 xdx\int_x^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 x\cdot(y)\Big|_x^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 x\cdot(\sqrt{x}-x)dx =$$

$$= \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} - x^2)dx = \left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} - (0-0) = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{15}$$

Но злоупотреблять короткой дорожкой не советую – повышается риск запутаться.

В разобранной задаче **жёстко требовалось** использовать *полярную систему координат*, и это очень хорошо! Я не иронизирую. Как ни странно, более свободная формулировка условия может здОрово осложнить жизнь. Отрубим ящерице хвост:

«Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченную линиями $x^2 + y^2 - 2y = 0,\ x = 0\ (x \ge 0)$, с помощью двойного интеграла»

Дело в том, что площадь данной фигуры рассчитывается и с помощью двойного интеграла $\iint_D dxdy$ в прямоугольной системе координат. Но решение получается длительным и громоздим, и если человек не знает о возможности перехода к полярным координатам, то будет загружен трудной работой. А по условию, никто ведь не запрещает решать через декартовы координаты ;)

Давайте ещё укоротим условие:

«Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченную линиями $x^2 + y^2 - 2y = 0,\ x = 0\ (x \geq 0)$»

Здесь появилась новая степень свободы, и площадь фигуры помимо прочих способов можно рассчитать **с помощью однократного интеграла** *(решение будет почти совпадать с решением через двойной интеграл)*. Впрочем, рецензент может не оценить такую вольность ☺. Чуть позже я коснусь ещё одной важной разновидности условия, а пока рассмотрим более содержательный пример:

Пример 24

С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x,\ \ y = 0,\ \ x^2 - 2x + y^2 = 0,\ \ x^2 - 4x + y^2 = 0$

Решение: изобразим данную фигуру на чертеже. С *прямыми* $y = x,\ \ y = 0$ всё понятно, осталось прояснить вид *линий 2-го порядка*. Выделяем полные квадраты:

$x^2 - 2x + y^2 = 0$

$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 = 0$

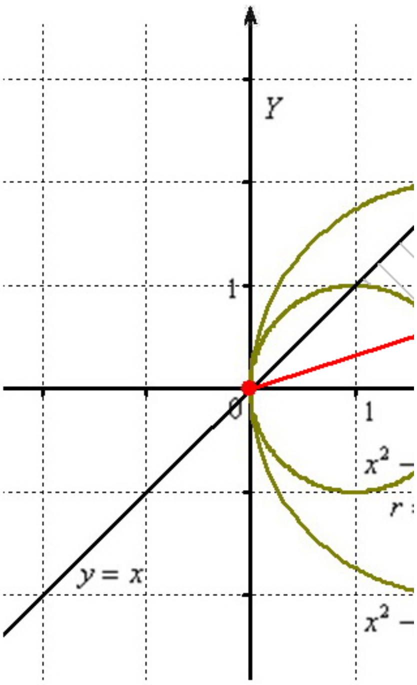
$(x-1)^2 + y^2 = 1$ – *окружность* единичного радиуса с центром в точке $(1; 0)$.

$x^2 - 4x + y^2 = 0$

$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 = 0$

$(x-2)^2 + y^2 = 2^2$ – *окружность* с центром в точке $(2; 0)$ радиуса 2.

Таким образом:



…

В условии задачи ничего не сказано о полярной системе координат, и поэтому площадь фигуры можно рассчитать «обычным» двойным интегралом в декартовых координатах. Но что-то не хочется ☺.

Итак, площадь фигуры вычислим с помощью двойного интеграла, используя полярную систему координат:

$$\iint\limits_D dxdy = \iint\limits_D rdrd\varphi$$

По формулам перехода $x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi$ найдём полярные уравнения окружностей:

$$\begin{array}{ll}
x^2 - 2x + y^2 = 0 & x^2 - 4x + y^2 = 0 \\
r^2\cos^2\varphi - 2r\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi = 0 & r^2\cos^2\varphi - 4r\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi = 0 \\
r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - 2r\cos\varphi = 0 & r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - 4r\cos\varphi = 0 \\
r^2 - 2r\cos\varphi = 0 & r^2 - 4r\cos\varphi = 0 \\
r - 2\cos\varphi = 0 & r - 4\cos\varphi = 0 \\
r = 2\cos\varphi & r = 4\cos\varphi
\end{array}$$

Теперь выясним *порядок обхода области*. Луч радара *(см. рис. выше)* входит в область через окружность $r = 2\cos\varphi$ и выходит из неё через окружность $r = 4\cos\varphi$ *(красная стрелка)*, при этом он осуществляет поворот от полярной оси $\alpha = 0$ до угла $\beta = \frac{\pi}{4}$ *рад. (зелёная стрелка).*

Напомню также, *что «альфа» и «бета» – это не просто формальные значения углов: полярное уравнение* $\alpha = 0$ *непосредственно задаёт полярную ось (положительное направление оси абсцисс), а уравнение* $\beta = \frac{\pi}{4}$ *– луч, исходящий из полюса и совпадающий с верхней частью прямой* $y = x$. *В нашей задаче дана «хорошая» прямая* $y = x$ *и значение угла* $\beta = \frac{\pi}{4}$ *понятно «с ходу». Но как найти угол в общем случае? Вспоминаем, что угловой коэффициент прямой* $y = kx + b$ *равен тангенсу угла наклона данной прямой к положительному направлению оси абсцисс:* $tg\beta = k$. *В данном случае* $tg\beta = 1$, *откуда следует, что* $\beta = arctg1 = \frac{\pi}{4}$.

И после такой шикарной справки возвращаемся к решению. По результатам «сканирования» области мы выяснили, что на промежутке $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ полярный радиус изменяется в пределах $2\cos\varphi \le r \le 4\cos\varphi$.

Перейдём к повторным интегралам:

$$S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_D rdrd\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} rdr$$

Остальное – дело техники:

1) Раскрутим внутренний интеграл:

$$\int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} rdr = \frac{1}{2}(r^2)\Big|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} = \frac{1}{2}((4\cos\varphi)^2 - (2\cos\varphi)^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(16\cos^2\varphi - 4\cos^2\varphi) = \frac{1}{2}\cdot 12\cos^2\varphi = 6\cos^2\varphi$$

2) И внешний, с помощью формулы $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$:

$$6\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi d\varphi = \ldots =$$

$$= 3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - (0+0)\right) = 3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3(\pi+2)}{4}$$

Ответ: $S = \frac{3(\pi+2)}{4}$ $ед.^2 \approx 3{,}86$ $ед.^2$

Прикинув по чертежу количество клеточек, приходим к выводу, что полученный результат вполне и вполне правдоподобен. Теперь ответим на следующий **важный вопрос**:

Каковы предпосылки для перехода к полярным координатам?

Основной предпосылкой является наличие окружности (ей). Подчёркиваю, что это лишь предпосылка, а не обязательное правило! То есть, область интегрирования может быть ограничена окружностью (ями), но переход к полярным координатам только усложнит решение, а то и вообще заведёт его в тупик. Поэтому другим важным условием является удачное «сканирование» области «радаром». Впрочем, в каждом случае нужно смотреть индивидуально.

Следующие два примера для самостоятельного решения:

Пример 25

С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 - 2y + y^2 = 0,\ x^2 - 6y + y^2 = 0,\ x = 0,\ y = \frac{x}{\sqrt{3}}$

Пример 26

Вычислить двойной интеграл, используя полярные координаты

$$\iint_D dxdy \qquad D: x^2 - 2x + y^2 = 0,\ x^2 - 4x + y^2 = 0,\ y = \frac{x}{\sqrt{3}},\ y = \sqrt{3}x$$

И в Примере 26 мы встретили ещё одну распространённую формулировку условия, в которой предложено непосредственно **вычислить двойной интеграл**. Да, он численно равен площади области D, но, коль скоро, о площади изначально молчок, то и в решении об этом не нужно упоминать ;-) Подумайте, как грамотно записать ответ задания.

Примерные образцы решений и чертежи в конце книги. Я их оформил в разном стиле, выбирайте, что больше нравится.

Разумеется, в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x;\,y)dxdy$ может оказаться и «настоящая» функция $f(x;\,y)$ с «живым» «иксом» и / или «игреком»:

Пример 27

Вычислить двойной интеграл, используя полярные координаты

$$\iint\limits_D xy^2dxdy \qquad D: x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=16,\ x\ge 0,\ y\le 0$$

Решение: область интегрирования здесь очень простая – это часть кольца между *концентрическими окружностями* $x^2+y^2=2^2$, $x^2+y^2=4^2$, которая располагается в *4-й координатной четверти* (о чём нам сообщают неравенства $x\ge 0,\ y\le 0$). И коль скоро так всё просто, можно сразу заняться переходом к полярной системе координат по формулам $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$.

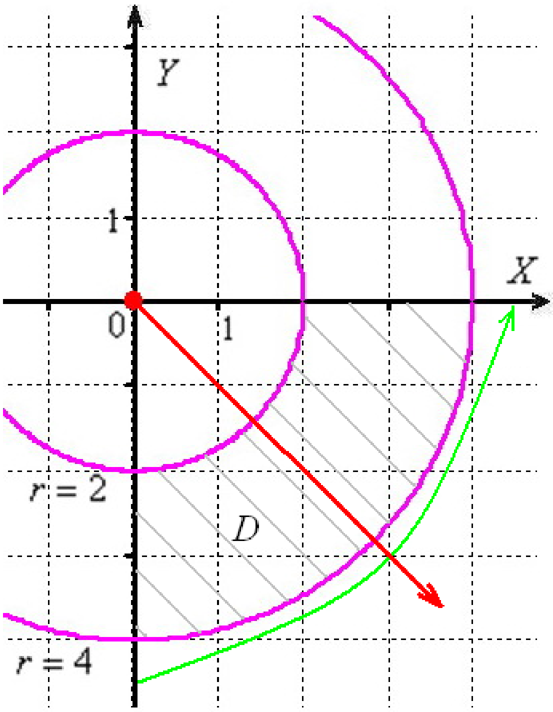
Найдём уравнения окружностей в полярных координатах:

$$x^2+y^2=4 \ \Rightarrow\ r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=4 \ \Rightarrow\ r^2=4 \ \Rightarrow\ r=2$$

$$x^2+y^2=16 \ \Rightarrow\ r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=16 \ \Rightarrow\ r^2=16 \ \Rightarrow\ r=4$$

ну, прямо чудо получилось – всегда бы такие уравнения ☺

Выполним чертёж:



Порядок обхода области предельно понятен:

$$2\le r\le 4$$

$$\frac{3\pi}{2}\le\varphi\le 2\pi$$

Можно было взять промежуток $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le 0$, но работать с **табличным значением** $\frac{3\pi}{2}$ гораздо привычнее.

Отличие от предыдущих примеров состоит в дополнительном шаге – преобразовании подынтегральной функции $f(x;\,y)=xy^2$. Используем те же стандартные формулы перехода $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$. Если совсем просто, то в *функцию двух переменных* $f(x;\,y)$ **вместо** «икс» подставляем $r\cos\varphi$ и **вместо** «игрек» $r\sin\varphi$:

$$f(r\cos\varphi;\,r\sin\varphi)=...$$

После подстановки полученное выражение максимально упрощают, но здесь этого особо не потребовалось.

Таким образом:

$$\iint\limits_D xy^2dxdy = \iint\limits_D r^3\sin^2\varphi\cos\varphi\cdot rdrd\varphi = \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}d\varphi\int\limits_2^4 r^4\sin^2\varphi...$$

Фишка последнего шага должна быть вам хорошо знакома: **когда проводится интегрирование по переменной «эр», то переменная «фи» считается константой (и наоборот)**. Поэтому константу $\sin^2\varphi\cos\varphi$ целесообразно сразу вынести из внутреннего интеграла, чтобы она не мешалась под ногами.

1) Вычислим незамысловатый внутренний интеграл:

$$\int\limits_2^4 r^4\,dr = \frac{1}{5}(r^5)\Big|_2^4 = \frac{1}{5}(4^5-2^5) = \frac{1}{5}(1024-32) = \frac{992}{5}$$

2) И внешний, сразу вынося полученную выше константу за пределы интеграла:

$$\frac{992}{5}\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi = ... = \frac{992}{5}\cdot\frac{1}{3}(\sin^3\varphi)\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} =$$

$$= \frac{992}{15}(0^3-(-1)^3) = \frac{992}{15}(0+1) = \frac{992}{15}$$

Ответ: $\iint\limits_D xy^2dxdy = \dfrac{992}{15}$

Повторим геометрический смысл полученного результата. Так как $x \geq 0$ и $y \leq 0$, то поверхность $f(x;y) = xy^2 \geq 0$ расположена **над** плоскостью XOY (в 4-й координатной четверти). Полученный в задаче результат – это в точности объём $V = \dfrac{992}{15} \approx 66{,}13$ $ед.^3$ *цилиндрического бруса*, **который ограничен** (представляем мысленно) плоскостью XOY $(z=0)$ снизу, поверхностью $f(x;y) = xy^2$ – сверху и множеством перпендикулярных лучей, исходящих из границы области D – сбоку. С задачей нахождения объёма тела мы вплотную столкнёмся при изучении тройных интегралов.

Аналогичный пример для самостоятельного решения:

Пример 28

Вычислить двойной интеграл, используя полярные координаты

$$\iint\limits_D \frac{y-4x}{x^2+y^2}dxdy \qquad D: x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=9,\ x\leq 0,\ y\geq 0$$

Примерный образец чистового оформления задания в конце книги.

В **соответствующей статье сайта** я также разбираю более редкие интегралы, где можно обойтись даже без чертежа, но это уже углублённый курс. Напомню заодно, что **если условие задачи того не требует – то чертёж можно и не выполнять**. Правда, область интегрирования всё равно придётся представить мысленно. Но даже если у вас есть такие способности, то демонстрировать их совсем не обязательно, ибо что тяжелА жизнь вундеркинда ;) Исключение составляют какие-то совсем простые области D.

1.6. Центр тяжести плоской фигуры

Это популярное физическое приложение двойного интеграла.

О ***центре тяжести*** *плоской фигуры* я рассказывал ещё в курсе *аналитической геометрии*, и сейчас мы на пальцах повторим, что это такое. Вырежьте из тонкого куска картона произвольную фигуру, какую захотИте. …Есть? Поднимите указательный палец строго вверх J. Теперь положите картонку на палец и добейтесь того, чтобы она не сваливалась. Эта точка картонной фигуры – и есть её центр тяжести.

В студенческой практике для решения, как правило, предлагается простейший случай – плоская ограниченная ***однородная*** фигура, то есть фигура постоянной физической плотности – стеклянная, деревянная, оловянная ~~чугунные игрушки, тяжёлое детство~~ и т.д. Далее по умолчанию речь пойдёт только о таких фигурах.

Первое правило и простейший пример: **если у плоской фигуры есть *центр симметрии*, то он является центром тяжести данной фигуры**. Например, центр круглой или квадратной однородной пластины. Логично и по-житейски понятно – масса такой фигуры «справедливо распределена во все стороны» относительно центра.

Однако в суровых реалиях вам вряд ли подкинут такую халяву, и поэтому на помощь придётся привлечь серьёзный математический аппарат:

Координаты $x_0; y_0$ **центра тяжести** M *плоской однородной ограниченной фигуры* D **рассчитываются по следующим формулам**:

$$x_0 = \frac{\iint\limits_D x dxdy}{\iint\limits_D dxdy},$$ …, их также можно записать **так**:

$$x_0 = \frac{\iint\limits_D x dxdy}{S},$$ …, где S – площадь фигуры (области D).

И наиболее компактная запись:

$$x_0 = \frac{I_x}{S}, \quad y_0 = \frac{I_y}{S}, \text{ где } S = \iint\limits_D dxdy, \quad I_x = \iint\limits_D x dxdy, \ldots$$

Интеграл I_x **будем условно называть *«иксовым» интегралом***, а интеграл I_y – ***«игрековым» интегралом***.

Примечание-справка: *для плоской ограниченной* ***неоднородной*** *фигуры, плотность которой задана функцией* $\rho(x;y)$, ***формулы более сложные****:*

$$x_0 = \frac{\iint\limits_D x\rho(x;y)dxdy}{m}, \quad y_0 = \frac{\iint\limits_D y\rho(x;y)dxdy}{m}, \text{ где } m = \iint\limits_D \rho(x;y)dxdy$$ *– масса фигуры;*

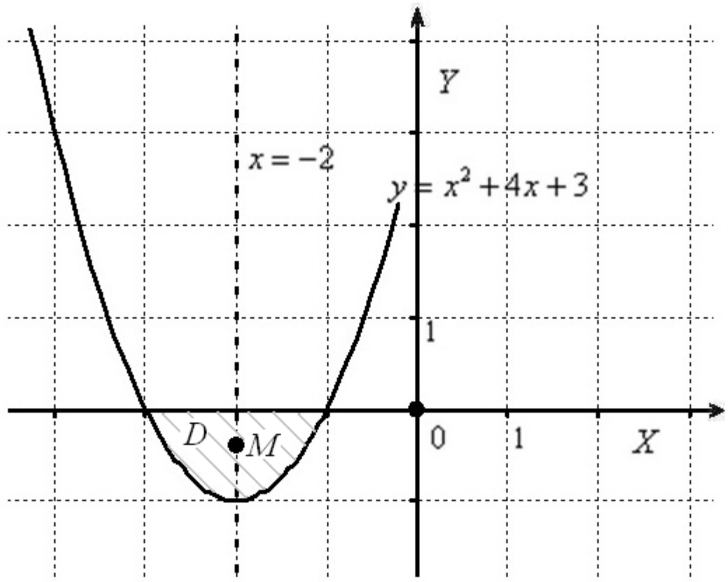
в случае однородной плотности фигуры $(\rho = const)$ *эти формулы упрощаются до вышеприведённых формул.*

На формулах, собственно, вся новизна и заканчивается, остальное – это ваше умение решать двойные интегралы, кстати, сейчас предоставляется прекрасная возможность потренироваться и усовершенствовать свою технику. А совершенству, как известно, нет предела: …или есть? ☺

Пример 29

Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x + 3, \quad y = 0$.

Решение: линии здесь элементарны: $y = 0$ задаёт ось абсцисс, а уравнение $y = x^2 + 4x + 3$ – банальную параболу. Я выполню сразу весь чертёж с готовой точкой $M(x_0;\, y_0)$ *центра тяжести* фигуры:



Правило второе: **если у фигуры существует *ось симметрии*, то центр тяжести данной фигуры обязательно лежит на этой оси**.

В нашем случае фигура симметрична относительно прямой $x = -2$ *(проведена пунктиром)*, то есть фактически мы уже знаем «иксовую» координату $x_0 = -2$ точки «эм».

Также обратите внимание, что по вертикали центр тяжести смещён ближе к оси абсцисс, поскольку там фигура более массивна.

Полезная рекомендация: ещё до вычислений постарайтесь определить примерное расположение центра тяжести «на глазок» – это поможет проверить полученные значения x_0, y_0 на предмет явных ошибок.

…Да, возможно, ещё не все до конца поняли, что такое центр тяжести: пожалуйста, поднимите вверх указательный палец и мысленно поставьте на него заштрихованную «подошву» точкой M. Теоретически фигура не должна упасть.

Координаты *центра тяжести* фигуры найдём по формулам $x_0 = \frac{I_x}{S}, \quad y_0 = \frac{I_y}{S}$, где $S = \iint\limits_D dxdy, \; I_x = \iint\limits_D xdxdy, \; I_y = \iint\limits_D ydxdy$.

Порядок обхода области D (фигуры) здесь очевиден:

$$x^2+4x+3\le y\le 0$$
$$-3\le x\le -1$$

Внимание! Определяемся с наиболее выгодным *порядком обхода* **один раз** – и используем его **для всех** двойных интегралов! А их тут будет три штуки:

1) Сначала вычислим площадь фигуры. Ввиду относительной простоты интеграла решение можно оформить «одной строкой», главное, не запутаться в вычислениях:

$$S=\iint_D dxdy=\int_{-3}^{-1}dx\int_{x^2+4x+3}^{0}dy=...=$$
$$=-\left(\frac{x^3}{3}+2x^2+3x\right)\Big|_{-3}^{-1}=-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)+(-9+18-9)=-\left(-\frac{4}{3}\right)+0=\frac{4}{3}$$

Смотрим на чертёж и прикидываем по клеточкам площадь. Получилось около дела.

2) Иксовая координата $x_0=-2$ центра тяжести уже найдена «графическим методом», поэтому можно сослаться на симметрию и перейти к следующему пункту. Но делать так-таки не советую – велика вероятность, что вас заставят решать по формуле. В этой связи координату лучше рассчитать формально. Вычислим «иксовый» интеграл:

$$I_x=\iint_D xdxdy=\int_{-3}^{-1}xdx\int_{x^2+4x+3}^{0}dy=\int_{-3}^{-1}x\cdot(y)\Big|_{x^2+4x+3}^{0}dx=\int_{-3}^{-1}x\cdot(0-(x^2+4x+3))dx=$$
$$=-\int_{-3}^{-1}(x^3+4x^2+3x)dx=-\left(\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\Big|_{-3}^{-1}=-\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{81}{4}-36+\frac{27}{2}\right)=$$
$$=-\frac{1}{4}+\frac{4}{3}-\frac{3}{2}+\frac{81}{4}-36+\frac{27}{2}=20+12-36+\frac{4}{3}=-4+\frac{4}{3}=-\frac{8}{3}$$

Таким образом: $x_0=\dfrac{I_x}{S}=\dfrac{-\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}}=-\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{3}{4}=-2$, что и требовалось получить.

3) Найдём ординату y_0 центра тяжести. Вычислим «игрековый» интеграл, внутри используем **правило умножения многочленов**:

$$I_y=\iint_D ydxdy=\int_{-3}^{-1}dx\int_{x^2+4x+3}^{0}ydy=...=$$
$$=-\frac{1}{2}\int_{-3}^{-1}(x^4+8x^3+22x^2+24x+9)dx=-\frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{5}+2x^4+\frac{22x^3}{3}+12x^2+9x\right)\Big|_{-3}^{-1}=$$
$$=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}+2-\frac{22}{3}+12-9\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{243}{5}+162-198+108-27\right)=\frac{19}{15}-\frac{9}{5}=-\frac{8}{15}$$

В результате: $y_0=\dfrac{I_y}{S}=\dfrac{-\frac{8}{15}}{\frac{4}{3}}=-\dfrac{8}{15}\cdot\dfrac{3}{4}=-\dfrac{2}{5}=-0{,}4$, что очень и очень похоже на правду. На заключительном этапе отмечаем на чертеже точку $M\left(-2;-\dfrac{2}{5}\right)$ и записываем

Ответ: $x_0=-2,\ y_0=-\dfrac{2}{5}$

Заметьте, что по условию не требовалось ничего чертить, но в большинстве задач мы волей-неволей вынуждены изобразить фигуру. Зато есть безусловный плюс – визуальная и довольно эффективная проверка результата.

Следующие два примера для самостоятельного решения.

Попроще:

Пример 30

Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 3x - x^2$, $y = 0$

И посложнее:

Пример 31

Найти центр тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 4$, $x - y - 2 = 0$ $(x - y - 2 \geq 0)$. Фигуру и её центр тяжести изобразить на чертеже.

И это как раз тот случай, когда вроде бы выполнены предпосылки для перехода к *полярной системе координат*, но в результате получаются настолько харкордные интегралы, что уж лучше решать в декартовых координатах.

Примерные образцы решений в конце книги.

Но, разумеется, есть задачи, где решение в полярных координатах оправдано. Желающие могут в качестве тренировки найти *центр тяжести* фигуры из Примера 23, тем более, там уже найдена площадь. Верный ответ $x_0 = \dfrac{4}{3\pi} \approx 0{,}42$, $y_0 = 1$. С подробным решением этого, а также более сложных примеров можно ознакомиться в **соответствующей статье сайта**.

Ну а сейчас пришло время немного отдохнуть и повысить ставки:

2. Тройные интегралы

– это то, чего уже можно не бояться ☺

2.1. Понятие тройного интеграла

Тройной интеграл *в общем виде* **записывается** следующим образом:

$$\iiint\limits_T f(x;\, y;\, z)dxdydz$$

И в самом деле, чего тут опасаться? Интегралом меньше, интегралом больше….

Разбираемся в записи:

$\iiint$ – значок тройного интеграла;

$u = f(x; y; z)$ – *подынтегральная* ***функция трёх переменных***;

$dxdydz$ – произведение *дифференциалов*.

T – *область интегрирования*.

Особо остановимся на *области интегрирования*. Если в двойном интеграле, она представляет собой *плоскую фигуру*, то здесь – ***пространственное тело***, которое, как известно, ограничено множеством *поверхностей*.

! Поэтому для дальнейшего изучения материала вы должны ориентироваться в основных поверхностях и уметь выполнять простейшие трёхмерные чертежи.

Без этого дальше, увы, никак. Знания можно быстро поднять в **соответствующей методичке** либо в последней главе моей книги **по аналитической геометрии**.

➢ Что значит решить тройной интеграл?

Решить (вычислить) тройной интеграл – это значит **найти ЧИСЛО**:

$\iiint\limits_T f(x;\, y;\, z)dxdydz = C$, где $C = const$

В простейшем случае, когда $f(x; y; z) = 1$, **тройной интеграл** $\iiint\limits_T dxdydz$ **численно равен объёму тела** T. В общем случае *(для произвольной функции* $f(x;\, y;\, z)$*, непрерывной в области* T *)* у интеграла есть важный физический смысл, но о нём позже.

➢ Как решить тройной интеграл?

Чтобы решить тройной интеграл нужно определить ***порядок обхода тела*** и перейти к *повторным интегралам*. После чего последовательно расправиться с тремя одиночными интегралами.

Как видите, вся кухня очень и очень напоминает двойные интегралы, с тем отличием, что сейчас у нас добавилась дополнительная размерность (грубо говоря, высота). И, наверное, Вы уже догадались, как решаются тройные интегралы. Развеем оставшиеся сомнения:

2.2. Как вычислить объём тела с помощью тройного интеграла?

По формуле $V = \iiint\limits_T dxdydz$, где T – искомое тело.

Пример 32

С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = y^2,\ y = 1 - x,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

Пожалуйста, перепишите на бумагу следующий список:

$z = y^2$

$y = 1 - x$

$x = 0$

$y = 0$

$z = 0$

и ответьте на вопросы: знаете ли Вы, какие *поверхности* задают эти уравнения? Понятен ли Вам неформальный смысл этих уравнений? Представляете ли Вы, как данные поверхности расположены в пространстве?

Если Вы склоняетесь к общему ответу «скорее нет, чем да», то **обязательно** проработайте материалы по геометрии, которые я рекомендовал на предыдущей странице. Без этого дальше никуда.

Решение: используем формулу $V = \iiint\limits_T dxdydz$.

Для того чтобы выяснить *порядок обхода тела* и перейти к *повторным интегралам* нужно (всё гениальное просто) понять, что это за тело. И такому пониманию во многих случаях здОрово способствуют чертежи.

По условию, тело ограничено несколькими поверхностями. С чего начать построение? Предлагаю следующий порядок действий:

Сначала изобразим *параллельную ортогональную* ***проекцию*** тела на координатную плоскость XOY . Это тень тела, когда солнышко светит на него прямо сверху ☺.

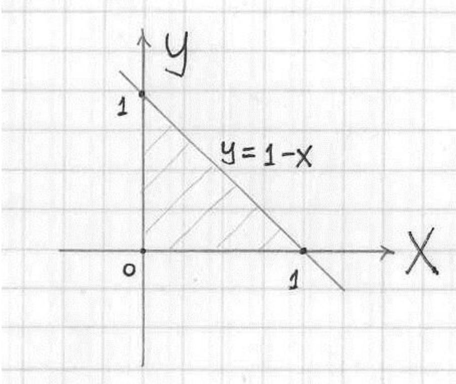
Коль скоро проецирование проводится вдоль оси OZ , то в первую очередь целесообразно разобраться с *поверхностями*, которые параллельны данной оси. Напоминаю, что уравнения таких поверхностей **не содержат буквы «зет»**. В нашей задаче их три:

– уравнение $x = 0$ задаёт координатную плоскость YOZ , которая проходит через ось OY ;

– уравнение $y = 0$ задаёт координатную плоскость XOZ , которая проходит через ось OX ;

– уравнение $y = 1 - x$ задаёт **плоскость**, проходящую через «одноимённую» *«плоскую» прямую* параллельно оси OZ .

Исходя из вышесказанного, искомая проекция, **скорее всего**, представляет собой следующий треугольник:

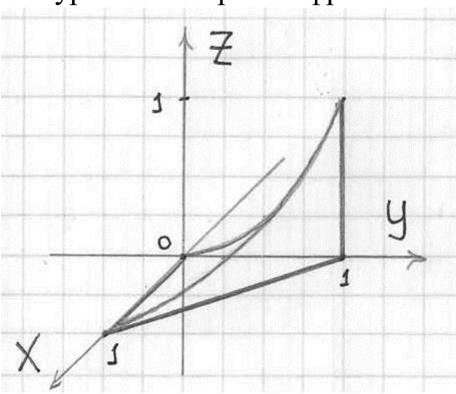


Возможно, не все до конца поняли, о чём речь. Представьте, что из экрана монитора выходит ось OZ и утыкается прямо в вашу переносицу (*т.е. получается, что Вы смотрите на 3-мерный чертёж сверху)*. Исследуемое пространственное тело находится в бесконечном трёхгранном «коридоре», и его проекция на плоскость XOY, **вероятнее всего**, представляет собой заштрихованный треугольник.

Обращаю особое внимание, что пока мы высказали **лишь предположение о проекции** и оговорки «скорее всего», «вероятнее всего» были не случайны. Дело в том, что проанализированы ещё не все поверхности и может статься так, что какая-нибудь из них «оттяпает» часть треугольника. В качестве наглядного примера напрашивается *сфера* с центром в начале координат радиусом мЕньшим единицы, например, сфера $\ldots$ – её проекция на плоскость XOY (*круг* $\ldots$) не полностью «накроет» заштрихованную область, и итоговая проекция тела будет вовсе не треугольником *(круг «срежет» ему острые углы)*.

На втором этапе выясним, чем тело ограничено сверху, чем снизу и выполним пространственный чертёж. Возвращаемся к условию задачи и смотрим, какие поверхности остались. Уравнение $z=0$ задаёт саму координатную плоскость XOY, а уравнение $z=y^2$ – *параболический цилиндр*, который расположен **над** плоскостью XOY и проходит через ось OX. Таким образом, проекция тела действительно представляет собой треугольник.

Аккуратно изобразим фрагмент параболического цилиндра и искомое тело:



После выполнения чертежей с *порядком обхода тела* никаких проблем!

Сначала определим порядок обхода проекции *(при этом ГОРАЗДО УДОБНЕЕ использовать двумерный чертеж – см. выше)*. Это делается **АБСОЛЮТНО ТАК ЖЕ**, как и в двойных интегралах! Вспоминаем лазерную указку и «сканирование» плоской области.

Выберем «традиционный» 1-й способ обхода: $\ldots$

Далее берём в руки волшебный фонарик, смотрим на трёхмерный чертёж и **строго снизу вверх** просвечиваем пациента. Лучи входят в *тело* через плоскость $z=0\,(XOY)$ и выходят из него через поверхность $z=y^2$. Таким образом, *порядок обхода тела*:

$$0 \le z \le y^2$$
$$0 \le y \le 1-x$$
$$0 \le x \le 1$$

Перейдём к повторным интегралам:

$$V=\iiint\limits_T dxdydz=...$$

С интегралами вновь (ещё раз вновь) рекомендую разбираться по отдельности:

1) Начать следует с самого нутра – «зетового» интеграла:

…

Подставим результат в «игрековый» интеграл:

$$V=\iiint\limits_T dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{y^2}dz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}y^2dy$$

Что получилось? По существу решение свелось к двойному интегралу, и именно – к формуле $V=\iint\limits_D f(x;\,y)dxdy$ объёма цилиндрического бруса! Дальнейшее хорошо знакомо:

2) $\displaystyle\int_0^{1-x}y^2dy=\frac{1}{3}(y^3)\Big|_0^{1-x}=\frac{1}{3}((1-x)^3-0^3)=\frac{(1-x)^3}{3}$

3) Последний интеграл удобно взять *методом подведения под знак дифференциала* – ещё раз заостряю внимание на этом выгодном способе решения:

$$\frac{1}{3}\int_0^1(1-x)^3dx=-\frac{1}{3}\int_0^1(1-x)^3d(1-x)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}(1-x)^4\Big|_0^1=$$

$$=-\frac{1}{12}((1-1)^4-(1-0)^4)=-\frac{1}{12}(0-1)=\frac{1}{12}$$

Ответ: $V=\dfrac{1}{12}$ ед^3. $\approx 0{,}0833$ ед^3.

Вычисления всегда можно записать и «одной строкой»:

$$V=\iiint\limits_T dxdydz=...=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1(y^3)\Big|_0^{1-x}dx=\frac{1}{3}\int_0^1(1-x)^3dx=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}(1-x)^4\Big|_0^1=-\frac{1}{12}(0-1)=\frac{1}{12}$$

Но с этим способом будьте осторожнее – выигрыш в скорости чреват потерей качества, и чем труднее пример, тем больше шансов допустить ошибку.

Ответим на важный технический вопрос:

Нужно ли делать чертежи, если условие задачи не требует их выполнения?

Можно пойти четырьмя путями:

1) Изобразить проекцию и само тело. Это самый выигрышный вариант – если есть возможность выполнить два приличных чертежа, не ленитесь, делайте оба чертежа. Рекомендую в первую очередь.

2) Изобразить только тело. Годится, когда у тела несложная и очевидная проекция. Так, например, в разобранном примере хватило бы и трёхмерного чертежа. Однако тут есть и минус – по 3D-картинке неудобно определять порядок обхода проекции, и этот способ я бы советовал только людям с хорошим уровнем подготовки.

3) Изобразить только проекцию. Тоже неплохо, но тогда обязательны дополнительные письменные комментарии, чем ограничена область сверху и снизу. К сожалению, третий вариант зачастую бывает вынужденным – когда тело слишком великО либо его построение сопряжено с иными трудностями. И такие примеры мы тоже рассмотрим.

4) Обойтись вообще без чертежей. В этом случае нужно представлять тело мысленно и закомментировать его форму / расположение письменно. Подходит для совсем простых тел либо задач, где выполнение обоих чертежей затруднительно. Но всё же лучше сделать хотя бы схематический рисунок, поскольку «голое» решение могут и забраковать.

Следующее тело для самостоятельного дела:

Пример 33

С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = 1 - x^2 - y^2,\ x + y - 1 \le 0,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$$

В данном случае *область интегрирования* задана преимущественно неравенствами, и это даже лучше – множество неравенств $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ задаёт *1-й октант*, включая координатные плоскости, а неравенство $x + y - 1 \le 0$ задаёт *полупространство*, содержащее начало координат *(проверьте)* + саму плоскость $x + y - 1 = 0$. «Вертикальная» плоскость $x + y - 1 = 0$ рассекает параболоид по *параболе* и на чертеже желательно построить данное сечение. Для этого нужно найти дополнительную опорную точку, лучше всего – вершину параболы *(рассматриваем значения $x = 0{,}5;\ y = 0{,}5$ и рассчитываем соответствующее «зет»)*.

…Тёмный лес? Вам **сюда** + **сюда** либо **сюда** – поднимаем геометрию!

Примерный образец оформления задачи в конце урока.

Продолжаем разминаться:

Пример 34

Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Выполнить чертёж.

$$z = 0,\ z = 1 - x^2,\ y = 0,\ y = 3 - x$$

Решение: формулировка «выполнить чертёж» даёт нам некоторую свободу, но, скорее всего, подразумевает выполнение пространственного чертежа. Однако и проекция тоже не помешает, тем более, она здесь не самая простая.

Придерживаемся отработанной ранее тактики, сначала разберёмся с *поверхностями*, параллельными оси аппликат. Уравнения таких поверхностей не содержат в явном виде переменную «зет»:

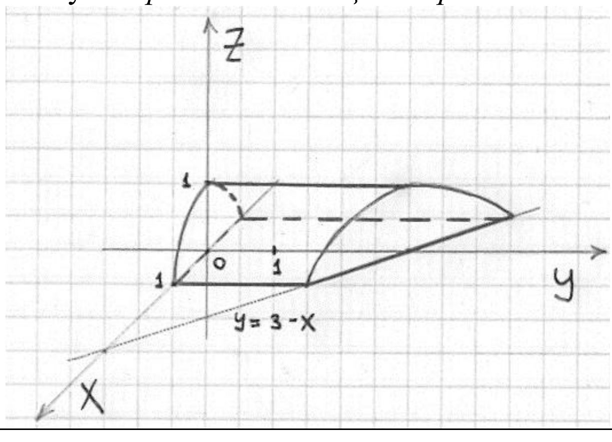
– уравнение $y = 0$ задаёт координатную плоскость XOZ, проходящую через ось OX (*ось абсцисс на плоскости* XOY *определяется «одноимённым» уравнением* $y = 0$);

– уравнение $y = 3 - x$ задаёт *плоскость*, проходящую через «одноимённую» «плоскую» *прямую* параллельно оси OZ.

Но две *прямые* $y = 0,\ y = 3 - x$ не задают ограниченную проекцию, и, очевидно, *параболический цилиндр* $z = 1 - x^2$ своими линиями пересечения с координатной плоскостью XOY $(z = 0)$ замыкает плоскую фигуру. Чтобы выяснить их уравнения нужно решить простейшую систему: $\begin{cases} z = 1 - x^2 \\ z = 0 \end{cases}$

Подставим $z = 0$ в первое уравнение: $0 = 1 - x^2 \Rightarrow x = -1,\ x = 1$ – получены две *прямые*, лежащие в плоскости XOY $(z = 0)$ и параллельные оси OY.

<table>
<tr>
<td>Изобразим проекцию тела на плоскость XOY:

…</td>
<td>Ну а искомое тело ограниченно плоскостью $z = 0$ снизу и параболическим цилиндром $z = 1 - x^2$ сверху:

</td>
</tr>
</table>

Определим *порядок обхода тела*, при этом «иксовые» и «игрековые» пределы интегрирования удобнее выяснять по двумерному чертежу:

$0 \le z \le 1 - x^2$ – луч лазера просвечивает тело **строго снизу вверх**!

$\begin{array}{l} 0 \le y \le 3 - x \\ -1 \le x \le 1 \end{array}$ – смотрим на проекцию тела.

Таким образом:

$$V=\iiint\limits_T dxdydz=\int_{-1}^{1}dx\int_0^{3-x}dy\int_0^{1-x^2}dz$$

1) $\int_0^{1-x^2}dz=(z)\Big|_0^{1-x^2}=1-x^2-0=1-x^2$

2) Напоминаю, что **при интегрировании по «игрек» – «икс» считается константой**, поэтому константу $(1-x^2)$ удобно сразу вынести за знак интеграла.

$$\int_0^{3-x}(1-x^2)dy=...$$

3) И заключительный, **внимательный** аккорд:

$$\int_{-1}^{1}(3-x-3x^2+x^3)dx=\left(3x-\frac{x^2}{2}-x^3+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=3-\frac{1}{2}-1+\frac{1}{4}-\left(-3-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{4}\right)=$$

$$=3-\frac{1}{2}-1+\frac{1}{4}+3+\frac{1}{2}-1-\frac{1}{4}=3-1+3-1=6-2=4$$

Ответ: $V=4$ ед^3.

Да, чуть не забыл, в большинстве случаев полученный результат малополезно (и даже вредно) сверять с трёхмерным чертежом, поскольку с большой вероятностью возникнет *иллюзия объёма*, о которой я рассказал в одной из статей сайта. Суть иллюзии состоит в том, что люди склонны неверно оценивать объём «на глазок», мы его либо занижаем, либо завышаем.

Так, человек за среднестатистическую жизнь суммарно выпивает жидкости объёмом со стандартную комнату 18 кв. м., что кажется очень малым объёмом. В нашей задаче наоборот – если вы посмотрите на пространственный чертёж, то вам покажется, что тело содержит больше четырёх «кубиков».

И после познавательного отступления задание для самостоятельного решения:

Пример 35

Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертежи данного тела и его проекции на плоскость XOY.

$$y=\sqrt{x},\ y=x^2,\ x+y+z-2=0,\ (z\geq 0)$$

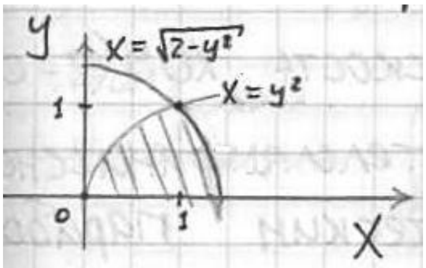
Обратите внимание, что условие этой задачи безвариантно требует выполнения обоих чертежей. Примерный образец оформления в конце книги.

Не редкость, когда выполнение трёхмерного чертежа затруднено, и этой ситуации посвящены ближайшие примеры:

Пример 36

С помощью тройного интеграла найти объём тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=2,\ y=\sqrt{x},\ y=0,\ z=0,\ z=15x$

Решение: проекция здесь несложная, но вот над *порядком* её *обхода* нужно подумать. Если выбрать 1-й способ, то фигуру придётся разделить на 2 части, что неиллюзорно грозит вычислением суммы **двух** тройных интегралов. В этой связи гораздо перспективнее выглядит 2-й путь. Выразим $x^2+y^2=2 \Rightarrow x=\sqrt{2-y^2}$, $y=\sqrt{x} \Rightarrow x=y^2$, изобразим проекцию на чертеже:



и выберем более выгодный порядок обхода фигуры:

$$y^2 \le x \le \sqrt{2-y^2}$$
$$0 \le y \le 1$$

Теперь дело за телом. Снизу оно ограничено плоскостью $z=0$, сверху – плоскостью $z=15x$, которая проходит через ось OY. И всё бы было ничего, но последняя плоскость слишком крутА и построить тело не так-то просто. Выбор тут незавиден: либо ювелирная работа в мелком масштабе (т.к. тело достаточно тонкое), либо чертёж высотой порядка 20 сантиметров (да и то, если вместится на тетрадный лист).

Но есть и третий, исконно русский метод решения проблемы – забить ☺. И вместо трёхмерного чертежа обойтись словесным описанием: «Данное тело ограничено цилиндрами $x^2+y^2=2,\ y=\sqrt{x}$ и плоскостью $y=0$ сбоку, плоскостью $z=0$ – снизу и плоскостью $z=15x$ – сверху».

«Вертикальные» пределы интегрирования, очевидно, таковы: $0 \le z \le 15x$

Вычислим объём тела, не забывая, что проекцию мы обошли менее распространённым способом:

$$V=\iiint\limits_T dxdydz=\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} dx \int_0^{15x} dz$$

1) $\displaystyle\int_0^{15x} dz=(z)\Big|_0^{15x}=15x-0=15x$

2) $\displaystyle 15\int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} xdx=15\cdot\frac{1}{2}(x^2)\Big|_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}}=\ldots$

3) $\displaystyle \frac{15}{2}\int_0^1 (2-y^2-y^4)dy=\frac{15}{2}\left(2y-\frac{y^3}{3}-\frac{y^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{15}{2}\left(2-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-(0-0-0)\right)=\frac{15}{2}\cdot\frac{22}{15}=11$

Ответ: $V=11$ ед^3.

Как вы заметили, предлагаемые в задачах телА часто ограничены плоскостью $z = 0$ снизу. Но это не есть какое-то правило, поэтому всегда нужно быть начеку – может попасться задание, где тело расположено и **под** плоскостью XOY. Так, например, если в рассмотренной задаче вместо $z = 15x$ рассмотреть плоскость $z = -15x$, то исследованное тело отобразится симметрично в нижнее полупространство и будет ограничено плоскостью $z = -15x$ снизу, а плоскостью $z = 0$ – уже сверху!

Легко убедиться, что получится тот же самый результат:

$$\int_{-15x}^{0} dz = (z)\Big|_{-15x}^{0} = 0 - (-15x) = 15x$$

*(помним, что тело нужно обходить **строго снизу вверх!**)*

Кроме того, «любимая» плоскость может оказаться вообще не при делах, простейший пример: *шар*, расположенный выше плоскости XOY – при вычислении его объёма уравнение $z = 0$ не понадобится вообще.

Все эти случаи мы рассмотрим, а пока аналогичное задание для самостоятельного решения:

Пример 37

С помощью тройного интеграла найти объём тела, ограниченного поверхностями:

$$x = \frac{5\sqrt{y}}{2},\ x = \frac{5y}{6},\ z = 0,\ z = \frac{5}{6}(3 + \sqrt{y})$$

Сверяемся с решением в конце книги и переходим к параграфу с не менее популярными материалами:

2.3. Тройной интеграл в цилиндрических координатах

Цилиндрические координаты – это, по сути, *полярные координаты* в пространстве. В цилиндрической системе координат положение произвольной точки M пространства **определяется** полярными координатами φ и r точки M' – проекции точки M на плоскость XOY и аппликатой z самой точки M.

Переход от *трёхмерной декартовой системы* к *цилиндрической системе координат* осуществляется по следующим формулам:

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$z = z \quad (\textit{аппликата остаётся неизменной})$$

Применительно к нашей теме преобразование выглядит следующим образом:

$$\iiint_T f(x;\, y;\, z)dxdydz = \iiint_T f(r\cos\varphi;\, r\sin\varphi;\, z)\cdot rdrd\varphi dz$$

И, соответственно, в упрощённом случае, который мы рассматриваем сейчас:

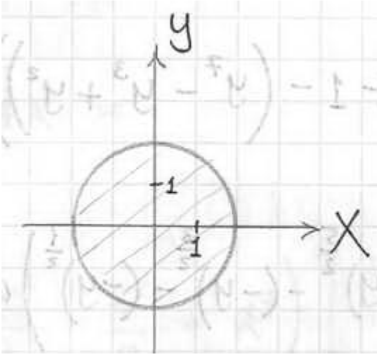
$$V = \iiint_T dxdydz = \iiint_T rdrd\varphi dz$$

Главное, не забывать про дополнительный множитель «эр» и правильно расставлять полярные *пределы интегрирования* при обходе проекции:

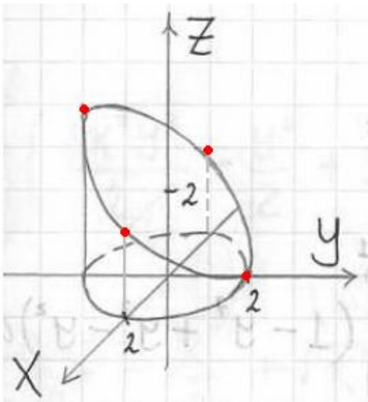
Пример 38

С помощью тройного интеграла вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $z=0,\ y+z-2=0,\ x^2+y^2=4$. Выполнить чертёж данного тела и его проекции на плоскость XOY.

Решение: придерживаемся того же порядка действий: в первую очередь рассматриваем уравнения, в которых отсутствует переменная «зет». Оно здесь одно. Проекция *цилиндрической поверхности* $x^2+y^2=4$ на плоскость XOY $(z=0)$ представляет собой одноимённую *окружность* $x^2+y^2=4$. Плоскости $z=0,\ y+z-2=0$ ограничивают искомое тело снизу и сверху и проецируются в круг $x^2+y^2\le 4$:



На очереди трёхмерный чертёж. Основная трудность состоит в построении плоскости $y+z-2=0$, которая пересекает цилиндр $x^2+y^2=4$ под «косым» углом, в результате чего получается *эллипс*. Уточним данное сечение аналитически: для этого перепишем уравнение плоскости в функциональном виде $z=2-0\cdot x-y$ и вычислим значения функции («высоту») в напрашивающихся точках $(2;0),(-2;0),(0;2),(0;-2)$, которые лежат на границе проекции: $z(2;0)=2-0\cdot 2-0=2,\quad z(-2;0)=2-0\cdot(-2)-0=2,$ $z(0;2)=2-0\cdot 0-2=0,\quad z(0;-2)=2-0\cdot 0-(-2)=2+2=4$. Отмечаем найденные точки на чертеже и аккуратно *(а не так, как я =))* соединяем их линией:



Проекция тела на плоскость XOY представляет собой круг, и это весомый аргумент в пользу перехода к *цилиндрической системе координат* по формулам $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=z$.

Найдём уравнения поверхностей в цилиндрических координатах:

$$x^2+y^2=4 \Rightarrow r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=4 \Rightarrow r^2=4 \Rightarrow r=2$$

$$y+z-2=0 \Rightarrow z=2-y \Rightarrow z=2-r\sin\varphi$$

Теперь нужно выяснить *порядок обхода тела*. Сначала разберёмся с проекцией. Как определить её порядок обхода? ТОЧНО ТАК ЖЕ, как и при вычислении двойных интегралов в полярных координатах. Здесь он элементарен:

…

«Вертикальные» пределы интегрирования тоже очевидны – входим в тело через плоскость $z=0$ и выходим из него через плоскость $z=2-y=2-r\sin\varphi$:

$$0\le z\le 2-r\sin\varphi$$

Перейдём к повторным интегралам:

$V=\iiint\limits_T dxdydz=\iiint\limits_T rdrd\varphi dz=...$, при этом множитель «эр» сразу ставим в «свой» интеграл. Веник как обычно ломаем по прутикам:

1) $\int\limits_0^{2-r\sin\varphi} dz=(z)\Big|_0^{2-r\sin\varphi}=2-r\sin\varphi-0=2-r\sin\varphi$

2) Сносим результат в следующий интеграл, **не забывая, что там уже есть «эр»**:

$\int\limits_0^2 r(2-r\sin\varphi)dr=\int\limits_0^2 (2r-r^2\sin\varphi)dr=...$

И ещё не забываем, что «фи» считается константой. Но это до поры до времени:

3) $\int\limits_0^{2\pi}\left(4-\frac{8}{3}\sin\varphi\right)d\varphi=\left(4\varphi+\frac{8}{3}\cos\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}=8\pi+\frac{8}{3}\cos 2\pi-\left(0+\frac{8}{3}\cos 0\right)=8\pi+\frac{8}{3}-\frac{8}{3}=8\pi$

Ответ: $V=8\pi$ ед^3. $\approx 25{,}13$ ед^3.

Похожее задание для самостоятельного решения:

Пример 39

Вычислить с помощью тройного интеграла объём тела, ограниченного поверхностями $z=0,\ x^2+y^2-z=0,\ x^2+y^2=4$. Выполнить чертёж данного тела и его проекции на плоскость XOY.

Примерный образец чистового оформления в конце книги.

Обратите внимание, что в условиях задач ни слова не сказано о переходе к цилиндрической системе координат, и несведущий человек будет «бодаться» с трудными интегралами в декартовых координатах. …А может и не будет – ведь есть третий, исконно русский способ решения проблем =) …Но не после прочтения этой книги!

Пример 40

С помощью тройного интеграла найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2,\ z^2=x^2+y^2$

Скромно и со вкусом.

Решение: данное тело ограничено *конической поверхностью* $z^2=x^2+y^2$ и *эллиптическим параболоидом* $z=x^2+y^2$. Подготовленный читатель уже представил, как выглядит тело, но на практике часто встречаются более сложные случаи, поэтому я проведу подробное аналитическое рассуждение. Сначала найдём линии, по которым пересекаются поверхности. Составим и решим соответствующую систему:

$$\begin{cases} z^2=x^2+y^2 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$$

Из 1-го уравнения *почленно вычтем* второе:

$z^2 - z = 0$

$z(z-1) = 0$

В результате получено два корня: $z = 0,\ z = 1$

Подставим найденное значение $z = 0$ в любое уравнение системы:

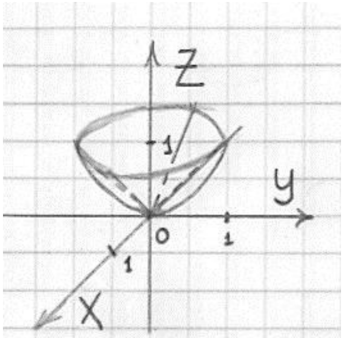
$0 = x^2 + y^2$, откуда следует, что $x = y = 0$.

Таким образом, корню $z = 0$ соответствует единственная точка – начало координат. Естественно – ведь вершины рассматриваемых поверхностей совпадают.

Теперь подставим второй корень $z = 1$ – тоже в любое уравнение системы:

$1 = x^2 + y^2$

Каков геометрический смысл полученного результата? «На высоте» $z = 1$ (в плоскости $z = 1$) *параболоид* и *конус* пересекаются по *окружности* $x^2 + y^2 = 1$ – единичного радиуса с центром в точке $(0; 0; 1)$. При этом «чаша» параболоида вмещает в себя «воронку» конуса, следовательно, *образующие* конической поверхности следует прочертить пунктиром (за исключением фрагмента дальней от нас *образующей*, который виден с данного ракурса):



Проекцией тела на плоскость XOY является круг $x^2 + y^2 \le 1$ с центром в начале координат радиуса 1, который я даже не удосужился изобразить ввиду очевидности данного факта. Кстати, и в двух предыдущих задачах можно было обойтись без двухмерного чертежа, но там его требовало условие.

При переходе к *цилиндрическим координатам* по формулам … неравенство $x^2 + y^2 \le 1$ запишется в простейшем виде $r \le 1$ и с порядком обхода проекции никаких проблем:

…

Найдём уравнения поверхностей в цилиндрической системе координат.

С параболоидом проблем нет вообще:

$z = x^2 + y^2 \Rightarrow z = r^2$

И с конусом их тоже нет. Так как в задаче рассматривается его верхняя часть, то из уравнения $z^2 = x^2 + y^2$ выражаем: $z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z = \sqrt{r^2} = r$

«Сканируем» тело вертикально, **строго снизу вверх**. Лучи света входят в него через *эллиптический параболоид* $z = r^2$ и выходят через *коническую поверхность* $z = r$. Таким образом, «вертикальный» порядок обхода тела:

…

В результате: $V=\iiint\limits_T dxdydz=\iiint\limits_T rdrd\varphi dz=...$

Остальное – дело несложной техники:

1) $\int\limits_{r^2}^{r} dz=(z)\Big|_{r^2}^{r}=r-r^2$

$...=\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-(0-0)=\frac{1}{12}$

3) $\frac{1}{12}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi=\frac{1}{12}(\varphi)\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{12}(2\pi-0)=\frac{\pi}{6}$

Ответ: $V=\frac{\pi}{6}$ ед^3. $\approx 0{,}52$ ед^3.

Не редкость, когда тело задаётся не ограничивающими его поверхностями, а множеством неравенств:

Пример 41

С помощью тройного интеграла вычислить объём заданного тела:
$x^2+y^2+z^2\le R^2,\ x^2+y^2\ge\frac{R^2}{4},\ z\ge 0$, где R – произвольное положительное число.

Данная задача хоть и содержит параметр, но допускает выполнение точного чертежа, отражающего принципиальный вид тела. Подумайте, как выполнить построение. Краткое решение и ответ – в конце книги.

2.4. Как вычислить произвольный тройной интеграл?

Отработаем технику и тонкости лечения пациентов $\iiint\limits_T f(x;y;z)dxdydz$, у которых подынтегральная *функция трёх переменных* $u=f(x;y;z)$ в *общем случае* отлична от константы и непрерывна в области T:

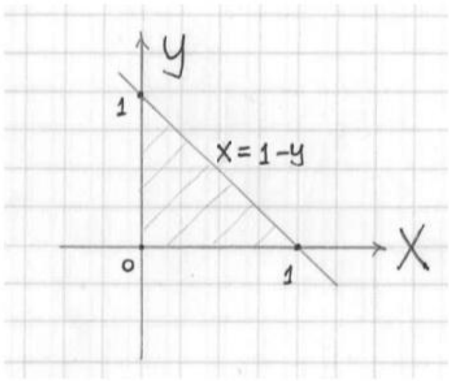
Пример 42

Вычислить $\iiint\limits_T 15(y^2+z^2)dxdydz$ по области $T: z=x+y,\ x+y=1;\ x=0;\ y=0;\ z=0$

На практике тело также обозначают буквой V, но это всё-таки не очень хороший вариант, ввиду того, она «зарезервирована» под обозначение объёма.

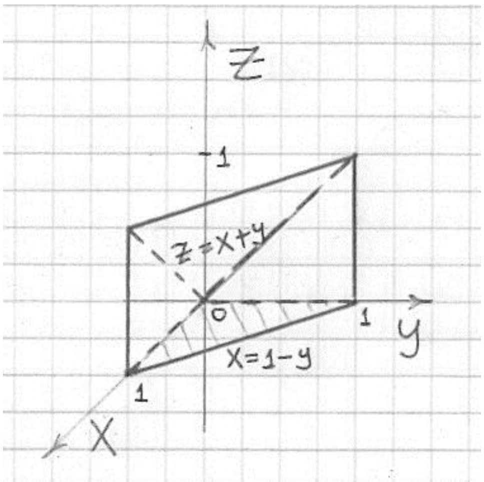
И вновь скажу, чего делать НЕ НАДО. По аналогии с двойными интегралами, здесь **не нужно** пользоваться *свойством линейности* и представлять интеграл в виде…. Хотя, если очень хочется, то можно. В конце концов, есть и небольшой плюс – запись будет пусть длинной, но зато менее загромождённой. Но такой подход всё-таки не стандартен.

В самом алгоритме **решения** новизны будет немного. Сначала нужно разобраться с областью интегрирования и её «тенью». Проекция тела на плоскость XOY представляет собой до боли знакомый треугольник:



Сверху тело ограничено *плоскостью* $z = x + y$, которая проходит через начало координат. Предварительно, к слову, нужно **обязательно проверить** *(мысленно либо на черновике)*, не «срезает» ли эта плоскость часть треугольника. Для этого находим её линию пересечения с координатной плоскостью XOY, т.е. решаем простейшую систему: $\begin{cases} z = x + y \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow y = -x$ – нет, данная прямая *(на чертеже отсутствует)* проходит «мимо» заштрихованной области, и проекция тела на плоскость XOY действительно представляет собой весь треугольник.

Не сложен здесь и пространственный чертёж:



В действительности можно было ограничиться только им, поскольку проекция очень простая. …Ну, или только чертежом проекции, так как тело тоже простое =) Однако совсем ничего не чертить, напоминаю – это плохой выбор.

Выберем следующий порядок обхода тела:

$0 \le z \le x + y$

$0 \le x \le 1 - y$

$0 \le y \le 1$

и перейдём к повторным интегралам:

…

Актуализируем элементарное правило:

Когда функция $u = f(x; y; z)$ дифференцируется по какой-либо переменной, то два других аргумента считаются константами.

И коль скоро так, то очевидно, справедливо и обратное:

Когда функция $u = f(x; y; z)$ интегрируется по какой-либо переменной, то два других аргумента считаются константами.

С *повторными интегралами* разберёмся друг за дружкой; ввиду кропотливости вычислений, я закомментирую почти каждый шаг:

1) Вычислим внутренний интеграл, сначала решение, затем комменты:

$$\int_0^{x+y}(y^2+z^2)dz \overset{(1)}{=} ...$$

(1) При интегрировании по «зет» x и y считаются константами. В данном случае присутствует только «игрек», но это не меняет дела. **Мысленно либо на черновике выполняем проверку**, а именно берём *частную производную по «зет»*:

$$\left(y^2z+\frac{z^3}{3}\right)'_z = y^2\cdot(z)'_z+\frac{1}{3}\cdot(z^3)'_z = y^2\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 3z^2 = y^2+z^2$$, что и хотелось увидеть.

(2) Теперь используем *формулу Ньютона-Лейбница*: сначала ВМЕСТО «зет» подставляем верхний предел интегрирования $(x+y)$, затем – нижний предел (ноль). **После подстановок буквы «зет» остаться не должно**!

Сносим трофей в следующий интеграл:

2) По существу, решение свелось к двум переменным и к двойному интегралу:

$$\int_0^{1-y}\left(y^2(x+y)+\frac{(x+y)^3}{3}\right)dx \overset{(1)}{=} ...$$

$$= y^2\int_0^{1-y}(x+y)d(x+y)+\frac{1}{3}\int_0^{1-y}(x+y)^3d(x+y) \overset{(3)}{=} y^2\cdot\frac{1}{2}(x+y)^2\Big|_0^{1-y}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}(x+y)^4\Big|_0^{1-y} \overset{(4)}{=}$$

$$=\frac{y^2}{2}((1-y+y)^2-(0+y)^2)+\frac{1}{12}((1-y+y)^4-(0+y)^4)=\frac{y^2}{2}(1-y^2)+\frac{1}{12}(1-y^4)=$$

$$=\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{2}+\frac{1}{12}-\frac{y^4}{12}=\frac{1}{12}+\frac{y^2}{2}-\frac{7y^4}{12}$$

(1) Используем *свойства линейности* интеграла, принимая во внимание тот факт, что «игрек» считается константой. Не возбраняется оставить интеграл единым, раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, но это менее рационально (можете попробовать).

(2) Используем *метод подведения под знак дифференциала*. Если рассуждения воспринимаются совсем тяжко, мысленно замените «игрек» каким-нибудь конкретным числом, например, «пятёркой».

(3) Интегрируем по «икс» и **выполняем проверку дифференцированием**:

$$\left(\frac{y^2}{2}(x+y)^2+\frac{1}{12}(x+y)^4\right)'_x=\frac{y^2}{2}((x+y)^2)'_x+\frac{1}{12}((x+y)^4)'_x=$$

$$=\frac{y^2}{2}\cdot 2(x+y)\cdot(x+y)'_x+\frac{1}{12}\cdot 4(x+y)^3\cdot(x+y)'_x=$$

$$=y^2(x+y)(1+0)+\frac{1}{3}(x+y)^3(1+0)=y^2(x+y)+\frac{(x+y)^3}{3}$$ – исходная функция.

(4) Используем *формулу Ньютона-Лейбница*. Сначала ВМЕСТО «икс» *(переменной, по которой проводилось интегрирование)* подставляем $1-y$, затем – ноль. **После подстановок пределов интегрирования буквы «икс» остаться не должно**!

Причёсываем результат и сносим его в последний интеграл, **не забывая про находящуюся перед интегралом константу** *(пятнадцать)*:

3) **Не расслабляемся**:

$$15\int_0^1\left(\frac{1}{12}+\frac{y^2}{2}-\frac{7y^4}{12}\right)dy=15\left(\frac{y}{12}+\frac{y^3}{2\cdot 3}-\frac{7y^5}{12\cdot 5}\right)\Bigg|_0^1=15\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}-\frac{7}{12\cdot 5}-(0+0-0)\right)=$$

$$=15\left(\frac{1}{4}-\frac{7}{12\cdot 5}\right)=\frac{15}{4}-\frac{7}{4}=\frac{8}{4}=2$$

Ответ: $\iiint\limits_T 15(y^2+z^2)dxdydz=2$

Результат безразмерен – просто число и всё. Но это «просто» лишь в рамках предложенной задачи, у тройного интеграла тоже есть физический смысл, о котором мы поговорим позже. Следующий пример для самостоятельного решения:

Пример 43

Вычислить тройной интеграл

$\iiint\limits_T (3x+4y)dxdydz$, $\quad T: y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=5(x^2+y^2),\ z=0$

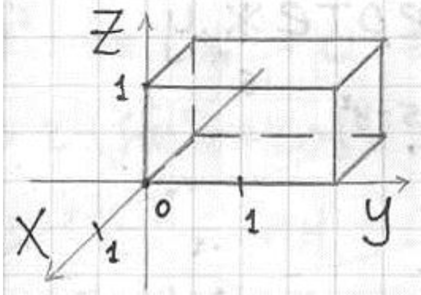
До сих пор мы рассматривали два способа решения – это проецирование на плоскость XOY и выбор порядка обхода проекции. Но на самом деле комбинаций больше – тело можно спроецировать на любую из трёх координатных плоскостей и каждую проекцию обойти двумя путями. Таким образом, получается **шесть способов решения**. И логично предположить, что некоторые из них могут быть проще, а некоторые – труднее.

Наверняка многие обратили внимание, что в Примере 42 я выбрал более редкий порядок обхода проекции, хотя ничто не мешало пойти «обычным» путём. Это не случайность. В результате нахождения интеграла $\int\limits_0^{x+y}(y^2+z^2)dz$ получена сумма $y^2(x+y)+\frac{(x+y)^3}{3}$, в которой чуть выгоднее считать константой именно «игрек», что при прочих равных условиях *(из уравнения прямой $x+y=1$ одинаково легко получить $y=1-x$ и $x=1-y$)* упрощает решение. А в некоторых задачах выбор порядка интегрирования и вовсе становится ОЧЕНЬ важным:

Пример 44

Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_T 8y^2ze^{2xyz}dxdydz$ по области $T: \begin{matrix} x=-1,\ y=0,\ z=0; \\ x=0,\ \ y=2,\ z=1. \end{matrix}$

Решение: область интегрирования ограничена шестью плоскостями и представляет собой *прямоугольный параллелепипед*:



У незамысловатых областей, как эта, можно не обращать внимания на проекции и придерживаться следующего **правила: обход тела осуществляется в направлениях координатных осей**. Пределы интегрирования здесь очевидны:

…

Но вот с *порядком обхода* не всё так просто. Если выбрать «традиционный» путь и сначала интегрировать по «зет», то получается интеграл $\int\limits_0^1 8y^2ze^{2xyz}dz = 8y^2\int\limits_0^1 ze^{2xyz}dz$, который нужно *брать по частям*. Аналогичная история, если в первую очередь интегрировать по «игрек»: $\int\limits_0^2 8y^2ze^{2xyz}dy = 8z\int\limits_0^2 y^2e^{2xyz}dy$ – тут даже дважды *по частям*.

Наиболее выгодным путём является **первоочередное интегрирование по «икс»**, в этом случае переменные $z,\ y$, а значит, и множитель $8y^2z$ считаются константами:

$$\int\limits_{-1}^0 8y^2ze^{2xyz}dx = 8y^2z\int\limits_{-1}^0 e^{2xyz}dx = 8y^2z\cdot\frac{1}{2yz}\int\limits_{-1}^0 e^{2xyz}d(2xyz) = 4y(e^{2xyz})\Big|_{-1}^0 = (*)$$

Перед тем, как подставлять *пределы интегрирования*, **выполняем проверку**:

$(4ye^{2xyz})'_x = 4y(e^{2xyz})'_x = 4ye^{2xyz}\cdot(2xyz)'_x = 4ye^{2xyz}\cdot 2yz\cdot(x)'_x = 8y^2ze^{2xyz}$ – получена исходная подынтегральная функция. Продолжаем решение:

$$(*) = 4y(e^{2\cdot 0\cdot yz} - e^{2\cdot(-1)\cdot yz}) = 4y(1-e^{-2yz})$$

Буква «икс» *(переменная интегрирования)* испарилась, как оно и должно быть.

Осталось два направления обхода: $0\le z\le 1,\ 0\le y\le 2$, и **следующий интеграл рациональнее взять по «зет»** (чтобы множитель $4y$ считался константой):

$$\int\limits_0^1 4y(1-e^{-2yz})dz = \ldots = (*)$$

Промежуточная проверка:

$$\left(4y\left(z+\frac{1}{2y}e^{-2yz}\right)\right)'_z = 4y\left((z)'_z + \frac{1}{2y}(e^{-2yz})'_z\right) = 4y\left(1+\frac{1}{2y}e^{-2yz}\cdot(-2yz)'_z\right) =$$

$$= 4y\left(1+\frac{1}{2y}e^{-2yz}\cdot(-2y\cdot 1)\right) = 4y(1-e^{-2yz}),$$ едем дальше:

$$(*) = 4y\left(1+\frac{1}{2y}e^{-2y\cdot 1} - \left(0+\frac{1}{2y}e^{-2y\cdot 0}\right)\right) = 4y\left(1+\frac{1}{2y}e^{-2y} - \frac{1}{2y}\right) = 4y + 2e^{-2y} - 2$$

В качестве дополнительного контроля снова смотрим, исчезла ли после подстановок переменная, по которой интегрировали («зет»)? И, наконец, оставшееся направление обхода $0\le y\le 2$ и **оставшийся интеграл**:

$$\int\limits_0^2 (4y+2e^{-2y}-2)dy = (2y^2 - e^{-2y} - 2y)\Big|_0^2 = (*)$$

Контроль: $(2y^2 - e^{-2y} - 2y)'_y = 2\cdot 2y - e^{-2y}\cdot(-2y)'_y - 2 = 4y + 2e^{-2y} - 2$

$(*) = 2\cdot 2^2 - e^{-2\cdot 2} - 2\cdot 2 - (0 - e^0 - 0) = 8 - e^{-4} - 4 + 1 = 5 - e^{-4}$, готово.

При подстановках следует проявлять повышенное внимание, так, например, при подстановке нуля в выражение $2y^2 - e^{-2y} - 2y$ второе слагаемое можно машинально счесть за ноль.

На чистовике, конечно же, не нужно всё расписывать так подробно, анализ порядка интегрирования и промежуточные проверки осуществляются мысленно либо на черновике. Решение оформляется стандартно в 3 пункта, но читатели с хорошим уровнем подготовки могут записать его и «одной строкой»:

$$\iiint_T 8y^2 z e^{2xyz} dxdydz = 8\int_0^2 y^2 dy \int_0^1 zdz \int_{-1}^0 e^{2xyz} dx = 8\int_0^2 y^2 dy \int_0^1 \frac{1}{2yz} \cdot zdz \int_{-1}^0 e^{2xyz} d(2xyz) =$$

$$= 4\int_0^2 ydy \int_0^1 (e^{2xyz})\Big|_{-1}^0 \cdot dz = \ldots =$$

$$= 4\int_0^2 y\left(1 + \frac{1}{2y}e^{-2y} - 0 - \frac{1}{2y}\right)dy = \int_0^2 (4y + 2e^{-2y} - 2)dy = (2y^2 - e^{-2y} - 2y)\Big|_0^2 =$$

$$= 8 - e^{-4} - 4 - (0 - 1 - 0) = 5 - e^{-4}$$

Ответ: $\iiint_T 8y^2 z e^{2xyz} dxdydz = 5 - e^{-4}$

Наверное, это понятно, но на всякий случай закомментирую: буквенные множители-«константы» в интегралах следует перемещать справа налево **последовательно и без «перескоков»** – до тех пор, пока каждая буква «не встретит свой интеграл». Условный пример:

$$\iiint_T xe^y \cos zdxdydz = \int_*^* dx \int_{**}^{**} dy \int_{***}^{***} xe^y \cos zdz = \int_*^* dx \int_{**}^{**} xe^y dy \int_{***}^{***} \cos zdz = \int_*^* xdx \int_{**}^{**} e^y dy \int_{***}^{***} \cos zdz$$

Но это если переменные можно вообще отделить, так, у условного интеграла: $\iiint_T e^{xyz} \sin(xyz) dxdydz$ – ничего отделить и переместить нельзя.

Аналогичное задание для самостоятельного решения:

Пример 45

Вычислить тройной интеграл

$$\iiint_T x^2 z \sin(xyz) dxdydz$$

$$T: \begin{matrix} x = 0; & y = 0; & z = 0; \\ x = 2; & y = \pi; & z = 1 \end{matrix}$$

Примерный образец чистового оформления задачи в конце книги.

Точно так же, как и при нахождении объёма, в некоторых интегралах удобен переход к цилиндрической системе координат, и мы, конечно же, разберём парочку задач; напоминаю, что все примеры я беру из реальных студенческих самостоятельных и контрольных работ. Поэтому **не ленимся**:

Пример 46

Вычислить тройной интеграл $3\iiint\limits_T yzdxdydz$ по области, ограниченной поверхностями $x^2+y^2+z^2=4,\ z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Решение: уравнение $x^2+y^2+z^2=2^2$ задаёт *сферу* с центром в начале координат радиуса 2, и осталось прояснить ситуацию с уравнением $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Для этого возведём обе его части в квадрат: $z^2=x^2+y^2 \Rightarrow x^2+y^2-z^2=0$ – каноническое уравнение *конической поверхности*, при этом функция $z=\sqrt{x^2+y^2}$ задаёт верхнюю её часть (поскольку $z=\sqrt{x^2+y^2}\ge 0$ при любых «икс», «игрек»).

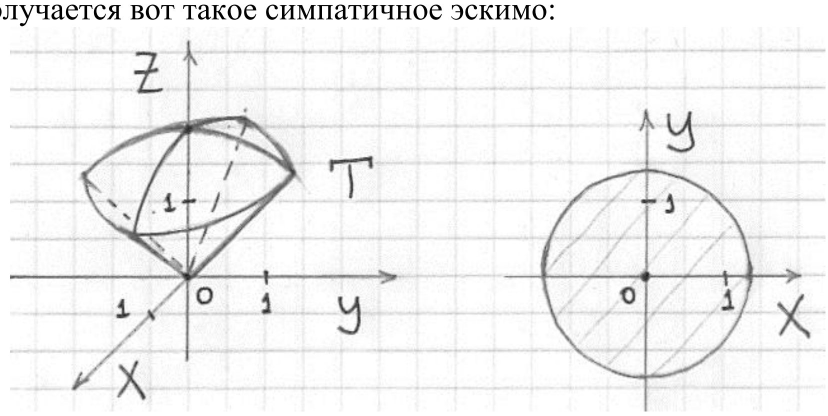
Найдём линию пересечения *сферы* и *конуса*, для этого составим и решим систему, состоящую из их уравнений:

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$ – подставим $z=\sqrt{x^2+y^2}$ во 2-е уравнение:

…

… – подставим в 1-е уравнение системы: $z=\sqrt{2}$

Таким образом, на высоте $z=\sqrt{2}$ конус пересекается со сферой по окружности $x^2+y^2=(\sqrt{2})^2$. **Сверху** область T ограничена сферой, **снизу** – конусом, и в результате у нас получается вот такое симпатичное эскимо:



Проекцией тела на плоскость XOY является *круг* $x^2+y^2\le(\sqrt{2})^2$ и это наталкивает на мысль перейти к цилиндрическим координатам: $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=z$. В этой системе координат уравнение окружности принимает вид $r=\sqrt{2}$ и, очевидно, *порядок обхода* проекции таков: $0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le r\le 2$. Найдём уравнения поверхностей в новой системе координат:

$z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow z=\sqrt{r^2}=r$ – уравнение верхней части конуса;

$x^2+y^2+z^2=4 \Rightarrow z=\sqrt{4-x^2-y^2} \Rightarrow z=\sqrt{4-r^2}$ – уравнение верхней полусферы.

«Луч лазера» входит в тело T **снизу** через конус $z=r$ и выходит из него **сверху** через сферу $z=\sqrt{4-r^2}$, следовательно, вертикальное направление обхода: $r\le z\le\sqrt{4-r^2}$.

В результате:

$$3\iiint_T yzdxdydz = 3\iiint_T r\sin\varphi \cdot zrdrd\varphi dz = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} dr...$$

Здесь мы на первом шаге перешли к цилиндрической системе координат, учитывая, что $y = r\sin\varphi,\ z = z,\ dxdydz = rdrd\varphi dz$, на втором шаге расставили *повторные интегралы* в соответствии с проведённым выше анализом, и на третьем – расставили множители по своим «родным» интегралам.

Повторные интегралы щёлкаем друг за дружкой:

1) $\displaystyle\int_r^{\sqrt{4-r^2}} zdz = \frac{1}{2}(z^2)\Big|_r^{\sqrt{4-r^2}} = ...$

2) Результат предыдущего пункта подставляем в средний интеграл, **не забывая, что там уже есть множитель** r^2:

$$... = \frac{2\cdot 2\sqrt{2}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{5} - (0-0) = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{5}$$

3) И, наконец, полученную константу подставляем во внешний интеграл, причём её можно сразу вынести. **Не забываем о множителе** $\sin\varphi$ **и тройке перед интегралом**:

$$3\left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{5}\right)\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi = 3\sqrt{2}\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{5}\right)\cdot(-1)\cdot\cos\varphi\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -3\sqrt{2}\cdot\frac{8}{15}(\cos 2\pi - \cos 0) = -\frac{8\sqrt{2}}{5}(1-1) = 0$$, готово.

Ответ: 0

Примечание: *при вычислении* $3\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\sqrt{2}} r^2 dr \int_r^{\sqrt{4-r^2}} zdz$ *можно было сразу взять интеграл* $\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi$ *и получить ноль (т.к. во внутренних интегралах от «фи» ничего не зависит), но такое решение вряд ли одобрят рецензенты. Тем не менее, оно встречается.*

Простенькая область и сакральный результат:

Пример 47

Вычислить интеграл $\iiint_T x^2(1+3z)dxdydz$ по телу $T: x^2 + y^2 = 1,\ z = 0,\ z = 2$

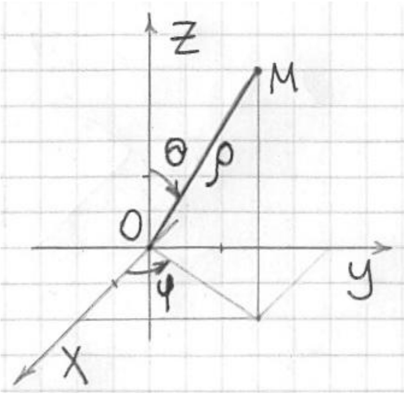
Решаем самостоятельно. Примерный образец чистового оформления задания в конце книги, оно почти устное.

Но этим всё дело не ограничивается! Читаем дальше:

2.5. Тройной интеграл в сферических координатах

До сих пор мы использовали цилиндрическую систему координат, которая, по технической сути, представляет собой «плоскую» *полярную систему* + дополнительную координату «зет». Но есть задачи, где невероятно удобны ***сферические координаты***.

В данной системе координат точка M пространства определяется её расстоянием $\rho = |OM|$ («ро») от начала координат и двумя углами:



Угол θ («тета») называется ***зенитным*** и отсчитывается **от** положительной полуоси OZ_+. Данный угол изменяется в пределах $0 \le \theta \le \pi$ и крайнему значению $\theta = \pi$ соответствуют точки, лежащие на нижней полуоси OZ_-.

Угол φ называется ***азимутальным*** и отсчитывается в плоскости XOY **против часовой стрелки**. Он изменяется в пределах $0 \le \varphi < 2\pi \quad (-\pi < \varphi \le \pi)$, иными словами, «ведёт» себя точно так же, как *полярный угол*.

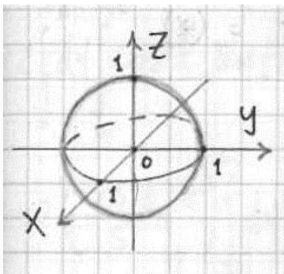
Таким образом, с помощью трёх координат «ро», «тета» и «фи» можно однозначно определить любую точку $M(\rho;\theta;\varphi)$ пространства.

Где используется ***сферическая система координат***? Ну, конечно, в астрономии. Однако своё скромное применения она нашла и при вычислении тройных интегралов:

Пример 48

Вычислить интеграл $\iiint\limits_T (x^2+y^2+z^2)dxdydz$ по шару $T: x^2+y^2+z^2 \le 1$.

Решение: тот редкий случай, когда можно обойтись без чертежа. Однако я всё же втайне мечтаю, что потомки оценят художественную ценность моих сканов:)



Тройной интеграл вычислим с помощью сферической системы координат. **Формулы перехода** к ней таковы:

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = \rho\cos\theta$$

При этом произведение трёх дифференциалов превращается в следующую вещь:

$dxdydz = \rho^2\sin\theta \cdot d\varphi d\theta d\rho$, где «добавка» $\rho^2\sin\theta$ – это «плата» за переход.

Определим *порядок обхода* тела. Для этого нужно найти уравнение *сферы* $x^2+y^2+z^2=1$ в сферических координатах. По формулам перехода:

…

$\rho^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=1$, откуда следует элементарное уравнение $\rho^2=1 \Rightarrow \rho=1$

Теперь смотрИте на чертёж выше и представляйте это в динамике:

– луч радара исходит из начала координат и выходит из тела через сферу $\rho = 1$: $0 \le \rho \le 1$, при этом *зенитный угол* проходит все свои значения: $0 \le \theta \le \pi$ и получившийся полукруг с *диаметром* на оси OZ совершает полный оборот вокруг этой оси: $0 \le \varphi < 2\pi$

В результате мы учли все точки шара, т.е. полностью обошли тело интегрирования.

Преобразуем подынтегральную функцию $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ и осуществим переход к сферической системе:

$$\iiint\limits_T (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz = \ldots$$

Остальное дело техники:

1) $\int_0^1 \rho^4 d\rho = \frac{1}{5}(\rho^5)\Big|_0^1 = \frac{1}{5}(1^5 - 0^5) = \frac{1}{5}$

2) …

3) $\frac{2}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{5}\cdot(\varphi)\Big|_0^{2\pi} = \frac{2}{5}\cdot(2\pi - 0) = \frac{4\pi}{5}$

Ответ: $\frac{4\pi}{5}$

Этот тройной интеграл можно было взять и через цилиндрические координаты, но вычисления получились бы заметно труднее.

Когда целесообразно использовать сферическую систему координат?

Прежде всего, когда нет проблем с определением *зенитного угла*. Как правило, это шар и его части, шар, вложенный в другой шар и т.п. конструкции. Кстати, *шаровой сектор* из Примера 46 – там этот угол прям конфетка, и я предлагаю вам самостоятельно решить данный интеграл вторым способом:

Пример 49

Вычислить тройной интеграл $3\iiint\limits_T yzdxdydz$ по области, ограниченной поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}$, с помощью сферической системы координат.

Ответы, разумеется, должны совпасть.

Следует однако заметить, что само по себе использование *сферических координат* ещё не означает, что решение получится проще.

Но самое интересное только начинается:

2.6. Физические приложения тройного интеграла

И сначала разомнёмся физически (давно пора), тело – в дело ☺. Пожалуйста, встаньте и найдите какой-нибудь пакет или мешок. Можно коробку. Теперь походите по квартире, ну или по улице и наведём порядок. А именно, наполним тару мусором.

…Очень хорошо, молодцы! В результате ваших трудов получено ограниченное тело неоднородной *плотности*. Как говорится, есть бумажка, а есть жестяная крышка. Воздух, кстати, тоже обладает вполне определённой плотностью. Напоминаю, что *физическая плотность* – есть отношение *единицы массы* к *единице объёма*, например, 100 грамм на кубический метр (средняя плотность хлопка) или 19,32 грамма на кубический сантиметр (да, всего лишь на сантиметр – это плотность чистого золота).

Ставим мешок рядышком и читаем дальше:

➢ Масса тела

Рассмотрим неоднородное *(переменной плотности)* тело T. Если известна непрерывная в области T функция $\rho(x;\,y;\,z)$ плотности тела, то его масса равна следующему тройному интегралу:

$$m=\iiint\limits_T \rho(x;\,y;\,z)\,dxdydz$$

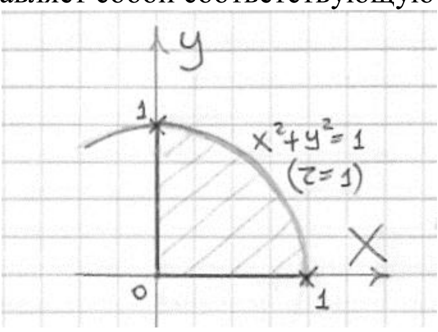
Возможно, не всем до конца понятен смысл функции плотности. Поясняю: если взять произвольную точку $(x_0;\,y_0;\,z_0)$, принадлежащую телу T, то значение функции $\rho(x_0;\,y_0;\,z_0)=\rho_0$ будет равно плотности тела в данной точке. В частности, если эта функция равна константе: $\rho(x;\,y;\,z)=C=const$, то речь идёт об однородном теле («мешок» хлопка или золота, например).

Но на практике не всё так легко:

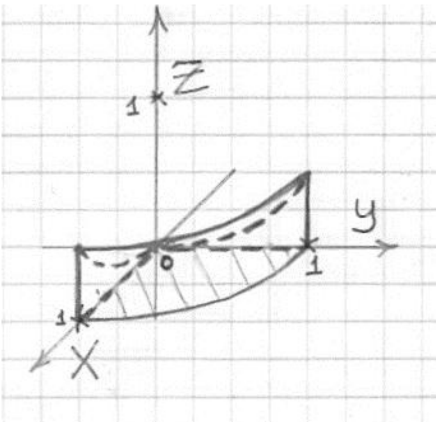
Пример 50

Вычислить массу неоднородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=2z,\ z=0,\ x\ge 0,\ y\ge 0$, если известна функция его плотности $\rho(x;\,y;\,z)=10x$.

Решение: искомое тело ограничено *цилиндром* $x^2+y^2=1$ сбоку, *эллиптическим параболоидом* $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ – сверху и плоскостью $z=0$ – снизу. Дополнительные условия $x\ge 0, y\ge 0$ «загоняют нас» в *1-й октант*, и проекция тела на плоскость XOY представляет собой соответствующую «четвертинку» единичного *круга*:



Аналитическим методом уточним высоту, на которой параболоид пересекает цилиндр: $\begin{cases} x^2+y^2=2z \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow 2z=1 \Rightarrow z=\dfrac{1}{2}$ и выполним пространственный чертёж:



Проекция тела на плоскость XOY сразу же наводит на мысль о переходе к цилиндрической системе координат $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=z$. Найдём уравнения поверхностей в этой системе:

$x^2+y^2=1 \Rightarrow r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=1 \Rightarrow r^2=1 \Rightarrow r=1$ – цилиндр;

$z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2) \Rightarrow z=\dfrac{r^2}{2}$ – и параболоид.

Порядок обхода тела очевиден:

…

$0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$ *(не забываем, что у нас только «четвертинка» круга!)*

Осталось преобразовать подынтегральную функцию:

$\rho(x;\,y;\,z)=10x \Rightarrow \rho(r\cos\varphi;\,r\sin\varphi;\,z)=10r\cos\varphi$

и осуществить переход:

$m=\iiint\limits_T \rho(x;\,y;\,z)dxdydz=...$

Вычисления элементарны:

$$\int_0^{\frac{r^2}{2}} dz=(z)\Big|_0^{\frac{r^2}{2}}=\frac{r^2}{2}-0=\frac{r^2}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{r^2}{2}\cdot r^2dr=\frac{1}{2}\int_0^1 r^4dr=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}(r^5)\Big|_0^1=\frac{1}{10}(1-0)=\frac{1}{10}$$

$$10\cdot\frac{1}{10}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi=(\sin\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1-0=1$$

Ответ: $m=1$ ед. массы, то есть, в предложенном теле (см. чертёж выше) содержится одна единица *(грамм, килограмм или другая)* массы.

Пример 51

Вычислить массу неоднородного тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2,\ z^2 = x^2 + y^2,\ y \ge 0$, если известна функция его плотности $\rho(x;\ y;\ z) = 70yz$.

Краткое решение в конце книги. И старая песня о главном:

Центр тяжести тела

Подобно тому, как задача о вычислении центра тяжести плоской фигуры решалась с помощью двойного интеграла, задача об отыскании ***центра тяжести*** *тела* решается аналогичным способом – с помощью тройного интеграла.

Что такое *центр тяжести* тела, довольно удачно объяснил ещё Архимед. Если тело подвесить на нить за центр тяжести, то оно будет сохранять равновесие в любом положении (как бы мы его предварительно ни повернули). В известной степени это не реализуемо (таки центр тяжести внутри тела), но зато очень понятно. И вполне в стиле древнегреческого учёного, который просил дать ему точку опоры, чтобы с помощью рычага перевернуть Землю.

Центр тяжести $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$ неоднородного тела T рассчитывается **по формулам**:

$$x_0 = \frac{\iiint\limits_T x\rho(x;\ y;\ z)dxdydz}{m},\quad y_0 = \frac{\iiint\limits_T y\rho(x;\ y;\ z)dxdydz}{m},\quad \ldots$$

, где $\rho(x;\ y;\ z)$ – функция плотности тела, а $m = \iiint\limits_T \rho(x;\ y;\ z)dxdydz$ – масса тела.

Если же тело однородно (стеклянное, оловянное, пластмассовое и т.д.), то формулы упрощаются. Так как плотность $\rho = const$ постоянна, и масса $m = \rho V$ – есть произведение плотности на объём, получаем:

$$\ldots,\quad z_0 = \frac{\iiint\limits_T zdxdydz}{V}$$

, а объём тела рассчитывается *(ещё не забыли? =))* с помощью тройного интеграла $V = \iiint\limits_T dxdydz$.

Для центра тяжести однородного тела справедливы следующие утверждения:

– если у тела есть центр симметрии, то он является центром тяжести *(простейший пример – центр шара)*;

– если у тела существует линия симметрии, то центр тяжести обязательно принадлежит данной линии;

– если у тела есть плоскость симметрии, то центр тяжести непременно лежит в этой плоскости.

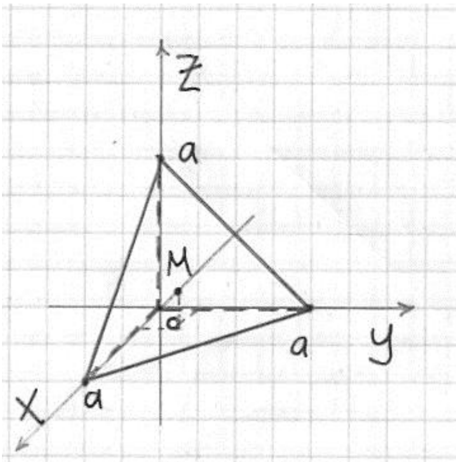
Как видите, практически полная аналогия с центром тяжести плоской фигуры.

Ну и, само собой, не могу не порадовать вас тематической задачей:

Пример 52

Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x+y+z=a\ (a>0)$, $x=0,\ y=0,\ z=0$. Выполнить чертежи данного тела и его проекции на плоскость XOY.

Решение: искомое тело ограничено координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=a$, которую в целях последующего построения удобно представить в отрезках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$. Выберем «а» за единицу масштаба и выполним трёхмерный чертёж:

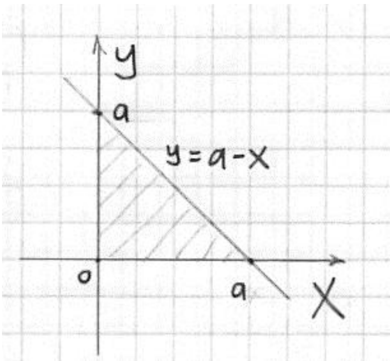


На чертеже уже поставлена готовая точка центра тяжести, однако, пока мы её не знаем.

Проекция тела на плоскость XOY очевидна, но, тем не менее, напомню, как её найти аналитически – ведь такие простые случаи встречаются далеко не всегда. Чтобы найти прямую, по которой пересекаются плоскости $x+y+z=a,\ XOY\ (z=0)$ нужно решить систему, составленную из их уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ z=0 \end{cases}$$

Подставляем значение $z=0$ в 1-е уравнение системы: $x+y+0=a$ и получаем уравнение $x+y=a$ «плоской» прямой:



Для взятия грядущих интегралов выберем «классический» порядок обхода тела:

$$0\le z\le a-x-y$$
$$0\le y\le a-x$$
$$0\le x\le a$$

Координаты $x_0,\ y_0,\ z_0$ *центра тяжести* M тела T вычислим по формулам:

…, где $V=\iiint\limits_T dxdydz$ – объём данного тела. И понеслась песня:

1) Сначала вычислим объём тела. Его, кстати, можно узнать заранее, пользуясь известной задачей геометрии об объёме тетраэдра. Объём тетраэдра равен 1/6-й объёма прямоугольного параллелепипеда, построенного на его трёх смежных рёбрах. В нашем случае параллелепипед представляет собой куб с ребром «а», а посему: $V_{тетраэдра}=\frac{1}{6}a^3$.

Осталось аккуратно провести штатные вычисления:

В примерах с громоздкими преобразованиями рекомендую записывать решение «столбиком» – меньше шансов запутаться: $V=\iiint_T dxdydz=\int_0^a dx\int_0^{a-x}dy\int_0^{a-x-y}dz=$

$$=\int_0^a dx\int_0^{a-x}(a-x-y)dy= \textit{(да, так можно – сразу снести } a-x-y \textit{ в средний интеграл)}$$

$$=\int_0^a\left(ay-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{a-x}dx=$$

$$=\int_0^a\left(a(a-x)-x(a-x)-\frac{(a-x)^2}{2}\right)dx=$$

$$=a\int_0^a(a-x)dx-\int_0^a(ax-x^2)dx-\frac{1}{2}\int_0^a(a-x)^2dx=$$

$$=-\frac{a}{2}(a-x)^2\Big|_0^a-\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a+\frac{1}{6}(a-x)^3\Big|_0^a=$$

$$=-\frac{a}{2}(0-a^2)-\left(\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}-0\right)+\frac{1}{6}(0-a^3)=$$

$=\dfrac{a^3}{2}-\dfrac{a^3}{6}-\dfrac{a^3}{6}=\dfrac{a^3}{6}$, и дело за тремя тройными интегралами:

2) Вычислим «иксовый» интеграл, …и местечка у меня тут не хватает, поэтому решение в столбик отменяется: $\iiint_T xdxdydz=\int_0^a xdx\int_0^{a-x}dy\int_0^{a-x-y}dz=\int_0^a xdx\int_0^{a-x}(a-x-y)dy=$

$$=\int_0^a x\left(ay-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{a-x}dx=\int_0^a x\left(a(a-x)-x(a-x)-\frac{(a-x)^2}{2}\right)dx=$$

$$=a\int_0^a(ax-x^2)dx-\int_0^a(ax^2-x^3)dx-\frac{1}{2}\int_0^a(a^2x-2ax^2+x^3)dx=$$

$$=a\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a-\left(\frac{ax^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^a-\frac{1}{2}\left(\frac{a^2x^2}{2}-\frac{2ax^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^a$$

$$=a\left(\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}\right)-\left(\frac{a^4}{3}-\frac{a^4}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{a^4}{2}-\frac{2a^4}{3}+\frac{a^4}{4}\right)=\frac{a^4}{6}-\frac{a^4}{12}-\frac{a^4}{24}=\frac{a^4}{24}$$

Таким образом, «иксовая» координата центра тяжести: …, ну что же, выглядит правдоподобно, по крайне мере, мы «попали внутрь» тела.

Учитывая симметрию тела, две другие координаты должны получиться такими же. Теперь ошибочный финал практически исключён! И я вам предлагаю рассчитать $y_0,\ z_0$ самостоятельно, после чего можно записать красивый **ответ**.

…А вы, наверное, не так давно и представить себе не могли, что окажетесь в эпицентре такого кошмара =)

3. Криволинейные интегралы

И чтобы у вас сразу отлегло от сердца: ***криволинейные интегралы*** – это всего лишь *однократные* интегралы. Они похожи на «обычные» **определённые интегралы**. Уже из самого названия нетрудно догадаться, что *путём интегрирования* криволинейных интегралов являются *кривые линии* (в общем случае).

Итак, паркет вашей комнаты – это координатная плоскость XOY, в углу стоИт ~~эльф~~ ось OZ, а сверху «зависло» расправленное одеяло, заданное *функцией* $z = f(x; y)$.

Возьмите в руки мел и начертите на полу под одеялом произвольную *кривую* L. Как вариант, у неё могут быть углы – такая линия называется *кусочно-гладкой*. Можно изобразить даже *ломаную*. ВажнА **спрямляемость** и непрерывность пути интегрирования. **Теперь суть:**

Представьте, что от одеяла осталась всего лишь нитка, лежащая над кривой L. Вертикальная *поверхность*, расположенная между кривой «эль» на полу и этой «ниткой» представляет собой фрагмент *криволинейного цилиндра*. …Получилась такая стоячая изогнутая ширма. …Представили? Отлично!

3.1. Криволинейный интеграл первого рода

имеет вид $\int\limits_L f(x; y)dl$ и *по модулю** равен площади $S_П$ данной «ширмы» (фрагмента криволинейного цилиндра).

** Если график $z = f(x; y)$ целиком или бОльшей частью расположен ниже плоскости XOY, то площадь получится со знаком «минус».*

В частности, если подынтегральная функция задаёт *плоскость* $z = f(x; y) = 1$, то *криволинейный интеграл* равен площади «ленты» единичной высоты, а также и длине самой линии интегрирования: $\int\limits_L f(x; y)dl = \int\limits_L dl = |L|$.

…Чего только не придумаешь, чтобы не делать чертежей ☺.

Значок dl **называют *дифференциалом дуги*** *кривой* L. Во многих источниках его обозначают через ds, но, на мой взгляд, это не слишком удачный выбор.

Если на плоскости XOY вместо кривой начертить отрезок прямой, то получится не что иное, как плоская *криволинейная трапеция*, параллельная оси OZ. Соответствующий интеграл хоть и каламбурно, но с полным правом можно назвать «прямолинейным», и это двоюродный брат определённого интеграла.

- **Как вычислить криволинейный интеграл 1-го рода?**

Пусть точки $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ являются концами линии L, а сама она задана *функцией одной переменной* $y(x)$ (в плоскости XOY). Тогда криволинейный интеграл первого рода можно свести к **определённому интегралу** по следующей **формуле**:

…

Формулу можно расписать подробно, без модуля при «дэ икс»:

$\int\limits_L f(x;y)dl = \int\limits_{x1}^{x2} f(x;y(x))\cdot\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$, если $x_1 < x_2$ *(стандартный случай)* или

$\int\limits_L f(x;y)dl = \int\limits_{x1}^{x2} f(x;y(x))\cdot\sqrt{1+(y'(x))^2}\cdot(-dx) = -\int\limits_{x1}^{x2} f(x;y(x))\cdot\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$, если $x_1 > x_2$.

В частности, при $f(x;y)=1$ получается хорошо знакомая формула **длины дуги кривой** $\int\limits_L dl = \int\limits_{x1}^{x2}\sqrt{1+(y'(x))^2}dx = |L| \quad (x_1 < x_2)$. …Вот так-то оно бывает – оказывается, криволинейные интегралы мы уже решали! И теперь вам совсем не нужно решимости:)

Пример 53

Вычислить интеграл $\int\limits_L ydl$ от точки $A(0;0)$ до точки $B(1;\sqrt{2})$, если кривая L задана уравнением $y^2 = 2x$

Решение: перед нами *каноническое уравнение параболы*, и коль скоро в условии дана точка $B(1;\sqrt{2})$, то речь идёт о её верхней ветке: $y(x)=\sqrt{2x}$. И вы можете даже не знать, как выглядит эта кривая. **Здесь важно**, что интегрирование проводится **от** точки $A(0;0)$ до точки $B(1;\sqrt{2})$, а посему $x_1 = 0,\ x_2 = 1$. Таким образом, у нас наиболее распространённый случай $x_1 < x_2$, следовательно, нужно использовать формулу:

$$\int\limits_L f(x;y)dl = \int\limits_{x1}^{x2} f(x;y(x))\cdot\sqrt{1+(y'(x))^2}dx.$$

Сначала удобно найти *производную*: $y'(x) = (\sqrt{2x})' = \sqrt{2}\cdot(\sqrt{x})' = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}$ и **сразу же** упростить корень: $\sqrt{1+(y'(x))^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{2}{4x}} = \sqrt{1+\frac{1}{2x}}$.

Так как $f(x;y)=y$ и $y(x)=\sqrt{2x}$, то $f(x;y(x))=\sqrt{2x}$ – грубо говоря, на данном шаге мы избавляемся от «игреков».

Предварительная подготовка завершена, пользуемся формулой:

$$\int\limits_L ydl = \int\limits_0^1 \sqrt{2x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx = \int\limits_0^1 \sqrt{2x\left(1+\frac{1}{2x}\right)}dx = \int\limits_0^1 \sqrt{2x+1}dx = (*)$$

здесь можно провести *замену переменной*, но гораздо сподручнее *подвести* подкоренное выражение *под знак дифференциала* и обойтись без перехода к новым пределам интегрирования:

$(*) = \ldots$

Ответ: $\int\limits_L ydl = \frac{3\sqrt{3}-1}{3}$

Если вычислить тот же самый интеграл в противоположном направлении – **от** точки $B(1;\sqrt{2})$ до точки $A(0;0)$, то результат не изменится. В этом случае пределы интегрирования поменяются местами $x_1=1,\ x_2=0$, и коль скоро $x_1>x_2$, то мы пользуемся второй формулой: $\int\limits_L f(x;y)dl=-\int\limits_{x1}^{x2} f(x;y(x))\cdot\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$, в нашем случае:

$$\int\limits_L ydl=-\int\limits_1^0\sqrt{2x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx=...=\frac{3\sqrt{3}-1}{3}$$

По существу, тут работает свойство $\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx$ определённого интеграла.

Таким образом, **криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от направления интегрирования**: $\int\limits_{AB} f(x;y)dl=\int\limits_{BA} f(x;y)dl$.

В этой связи типовая задача, как правило, формулируется «нейтрально»: *вычислить интеграл* $\int\limits_L ydl$ *вдоль дуги параболы* $y^2=2x$, *расположенной между точками* $A(0;0),\ B(1;\sqrt{2})$. Иными словами, совершенно не важно, какая из точек является началом, а какая – концом кривой.

Следует отметить, что криволинейный интеграл можно вычислить и другим способом. Поскольку буква «игрек» ничем не хуже «икса», то для вычисления криволинейного интеграла 1-го рода справедлива «зеркальная» формула *(тривиальный вариант* $y_1<y_2$*)*:

…, где $x(y)$ – *обратная* функция, выражающая линию L.

С параболой никаких проблем $y^2=2x\Rightarrow x(y)=\frac{y^2}{2}$,

и производной – тем более: $x'_y(y)=\left(\frac{y^2}{2}\right)'_y=\frac{2y}{2}=y$

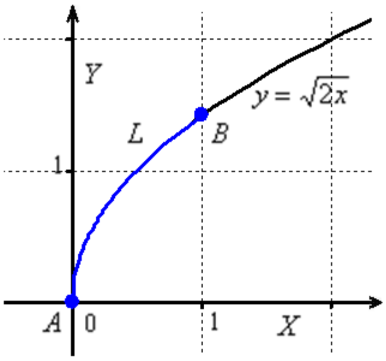
При переходе от $f(x;y)$ к $f(x(y);y)$ мы должны избавиться от всех «иксов», однако функция $f(x;y)=y$ от них не зависит, а значит, делать ничего не нужно.

И, учитывая, что для «игрековых» координат точек $A(0;0),\ B(1;\sqrt{2})$ справедливо неравенство $y_1<y_2$, доводим решение до того же самого результата:

$$\int\limits_L ydl=\int\limits_0^{\sqrt{2}} y\sqrt{1+y^2}dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{2}}(1+y^2)^{\frac{1}{2}}d(1+y^2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{(1+y^2)^3}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{1}{3}\left(\sqrt{(1+2)^3}-\sqrt{(1+0)^3}\right)=\frac{1}{3}(\sqrt{3^3}-\sqrt{1^3})=\frac{3\sqrt{3}-1}{3}$$

В чём состоит геометрический смысл разобранной задачи? На плоскости XOY между точками $A(0;0)$ и $B(1;\sqrt{2})$ находится кусок *параболы* $y=\sqrt{2x}$, через который проходит «одноимённый» *параболический цилиндр* $y=\sqrt{2x}$ параллельно оси OZ.



Этот цилиндр «высекает» из плоскости $f(x;y)=y$ пространственную «ниточку» (выше плоскости XOY).

Криволинейный интеграл $\int\limits_L ydl$ численно равен площади $S_П=\dfrac{3\sqrt{3}-1}{3}$ *фрагмента* параболического цилиндра, который расположен между куском параболы и этой «ниткой». ...Вроде всё понятно….

Как я уже отмечал, криволинейный интеграл может получиться отрицательным – это означает, что фрагмент полностью или бОльшей частью лежит ниже плоскости XOY. Не удивляйтесь и нулю *(в каких случаях?)*. То есть, «всё как у нормальных интегралов» ☺.

Аналогичный пример для самостоятельного решения:

Пример 54

Вычислить интеграл $\int\limits_L xydl$ по дуге окружности $x^2+y^2=1$ от точки $A(-1;0)$ до точки $B(0;1)$. Пояснить геометрический смысл полученного результата.

Краткое решение с комментариями в конце книги – тот, кто правильно во всём разобрался, может считать себя «самоваром» интегралов =)

Но этим практика не исчерпывается, ситуации бывают разные:

- **Если линия задана параметрически**

Довольно часто линия L бывает задана *параметрическими уравнениями* $x=x(t),\ y=y(t)$, в этом случае нужно использовать следующую **формулу**:

$$\int\limits_L f(x;y)dl=\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t);y(t))\cdot\sqrt{(x_t'(t))^2+(y_t'(t))^2}\,dt$$ – если значение параметра возрастает $(t_1\le t\le t_2)$.

И для убывающего параметра $(t_1>t_2)$:

…

В частности, при $f(x;y)=1$ получается опять же знакомая **формула длины параметрически заданной кривой**:

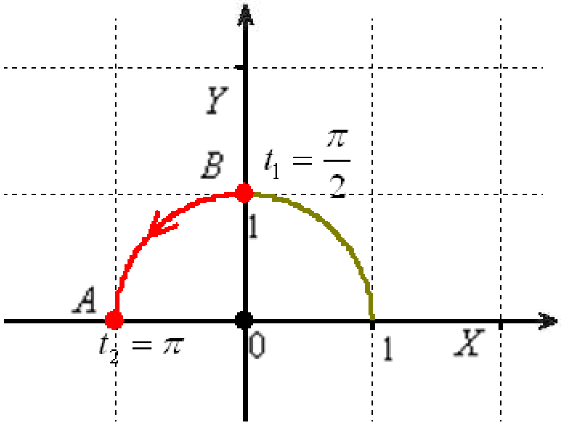
$$\int\limits_L f(x;y)dl=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x_t'(t))^2+(y_t'(t))^2}\,dt=|L|\quad(t_1\le t\le t_2).$$

Пример 55

Вычислить криволинейный интеграл $\int_L xydl$ по дуге окружности

$x(t)=\cos t,\ y(t)=\sin t$ при изменении параметра $\frac{\pi}{2}\le t\le\pi$.

Решение: указанным пределам изменения параметра соответствует левая верхняя дуга единичной окружности:



По условию, значение параметра возрастает $(t_1\le t\le t_2)$, поэтому пользуемся формулой $\int_L f(x;y)dl=\int_{t_1}^{t_2} f(x(t);y(t))\cdot\sqrt{(x'_t(t))^2+(y'_t(t))^2}dt$.

Как и в предыдущих примерах, сначала удобно найти производные:

$x'_t(t)=(\cos t)'_t=-\sin t,\quad y'_t(t)=(\sin t)'_t=\cos t$ и причесать корень:

$\sqrt{(x'_t(t))^2+(y'_t(t))^2}=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}=\sqrt{1}=1$ …Мда, тут вообще стрижка наголо получилась =) Ну что же, парикмахеру легче, по указанной выше формуле имеем:

$$\int_L xydl=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos t\cdot\sin t\cdot 1\cdot dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin 2tdt=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=$$

$$=-\frac{1}{4}(\cos 2\pi-\cos\pi)=-\frac{1}{4}(1-(-1))=-\frac{1}{4}\cdot 2=-\frac{1}{2}$$

Ответ: $\int_L xydl=-\frac{1}{2}$

Напоминаю, что криволинейный интеграл 1-го рода **не зависит от направления интегрирования**. Так, в разобранной задаче можно интегрировать наоборот – от точки A до точки B, при этом значение параметра убывает от π до $\frac{\pi}{2}$, в результате чего мы пользуемся второй формулой (со знаком «минус») и получаем тот же ответ.

И на всякий пожарный, формула для кривой, заданной уравнением $r(\varphi)$ в *полярных координатах*: …

3.2. Важные свойства криволинейных интегралов

Криволинейные интегралы 1-го рода обладают всеми типичными свойствами «клана» интегралов, в частности, для них справедливо *свойство линейности*:

$$\int_L Cf(x;y)dl = C\int_L f(x;y)dl, \text{ где } C = const;$$

$$\int_L (f(x;y)+g(x;y))dl = \int_L f(x;y)dl + \int_L g(x;y)dl,$$

а также *свойство аддитивности*: если на линии AB выбрать промежуточную точку C, то интеграл можно разделить на две части:

$$\int_{AB} f(x;y)dl = \int_{AC} f(x;y)dl + \int_{CB} f(x;y)dl$$

…Сейчас что-нибудь придумаю в качестве примера, чтобы легко было нарисовать в уме,… предположим, нам нужно вычислить криволинейный интеграл по *ломаной* OAB:

$$\int_{OAB} f(x;y)dl, \text{ где } O(0;0), A(1;1), B(0;2).$$

Без проблем – представим его в виде суммы двух интегралов по отрезкам OA, AB:

$$\int_{OAB} f(x;y)dl = \int_{OA} f(x;y)dl + \int_{AB} f(x;y)dl$$ – и вперёд с песнями.

Указанные свойства справедливы и для *криволинейных интегралов* ***второго рода***, которые на практике встречаются гораздо чаще:

3.3. Криволинейные интегралы второго рода

В этом курсе я почти не освещал теорию, но тут немножко надо, постарайтесь понять хотя бы примерно ☺.

«Реалити-шоу» точно такое же. Отличие будет в *способе* интегрирования. Если в интеграле $\int_L f(x;y)dl$ мы имели дело с *бесконечно малыми* кусочками dl самой линии L, то сейчас интегрирование пойдёт по *проекциям* dx этих кусочков на *ось абсцисс*:

$\int_L f(x;y)dx$, или, как вариант – по их *проекциям* dy на *ось ординат*: $\int_L f(x;y)dy$,

причём, если линия L **не** параллельна координатным осям, то эти интегралы равны между собой: $\int_L f(x;y)dx = \int_L f(x;y)dy$

Но в большинстве задач приходится иметь дело с так называемой *общей формой* криволинейного интеграла от двух функций:

$$\int_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy$$

С практической точки зрения будут важнЫ те же свойства *линейности* и *аддитивности*, а также тот факт, что: **криволинейный интеграл 2-го рода зависит от направления интегрирования, при этом**:

…., где A и B – концы линии L.

С чисто формальной точки зрения криволинейный интеграл 2-го рода «опознаётся» по наличию в *подынтегральном выражении* дифференциалов dx, dy *(намного реже – какого-то одного)*, и алгоритм его решения гораздо бесхитростнее, нежели «разборки» со «старшим братом»:

Пример 56

Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L \frac{y-1}{x}dx + \frac{x+1}{y}dy$, где L – отрезок прямой от точки $A(1;1)$ до точки $B(3;2)$. Выполнить чертёж.

Решение: на первом шаге нам нужно найти уравнение *прямой*, которая содержит отрезок AB. Составим его **по двум точкам**:

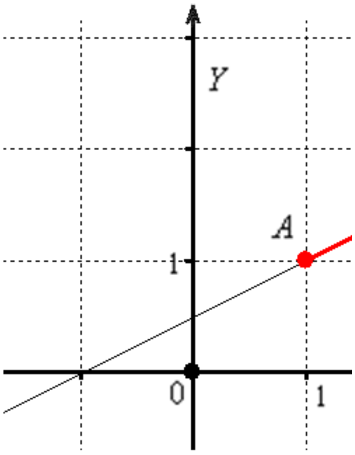
$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-1}{2-1}$$

$$x-1 = 2y-2$$

$$2y = x+1$$

$$y = \frac{1}{2}(x+1)$$

Несмотря на то, что линия интегрирования весьма простА, по условию требуется выполнить чертёж:



…

Обязательно указываем направление интегрирования! – здесь оно имеет принципиальное значение.

Также **всегда обращайте внимание** на следующую вещь: **каждая точка линии** L **должна входить** в **области определения подынтегральных** функций $P(x;y)$ и $Q(x;y)$.

В нашей задаче $P(x;y) = \frac{y-1}{x}$, $Q(x;y) = \frac{x+1}{y}$, и, очевидно, что $x \neq 0, y \neq 0$. Поэтому линия интегрирования не должна пересекать координатные оси! *(которые задаются уравнениями* $x=0, y=0$*)*

Иногда авторы задачников и методичек недоглядывают за этим моментом, в результате чего получается невразумительное решение, где ответ, например, может оказаться бесконечным.

➢ Как вычислить криволинейный интеграл 2-го рода?

Криволинейный интеграл второго рода тоже сводится к определённому интегралу, и в результате этого перехода мы должны «избавиться» либо от всех «игреков», либо от всех «иксов».

Способ первый, традиционный, где осуществляется переход к интегрированию **по переменной** x. Пределы интегрирования, как нетрудно догадаться, соответствуют «иксовым» координатам точек $A(1;1),\ B(3;2)$, при этом не имеет значения, какой из них больше, а какой меньше. НО, **принципиально важен их порядок** – **интегрировать нужно строго по заданному направлению**: от 1 до 3.

Берём уравнение линии $y=\frac{1}{2}(x+1)$ и находим *дифференциал*:

$$dy=d\left[\frac{1}{2}(x+1)\right]=\left(\frac{1}{2}(x+1)\right)'dx=\frac{dx}{2}$$

После чего подставляем $y=\frac{1}{2}(x+1)$ и $dy=\frac{dx}{2}$ в подынтегральное выражение:

$$\int_{AB}\frac{y-1}{x}dx+\frac{x+1}{y}dy=\int_1^3\left(\frac{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}-1}{x}dx+\frac{x+1}{\frac{1}{2}(x+1)}\cdot\frac{dx}{2}\right)=\ldots=$$

$$=\int_1^3\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2x}\right)dx=\frac{1}{2}\int_1^3\left(3-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}(3x-\ln|x|)\Big|_1^3=\frac{1}{2}(9-\ln3-(3-\ln1))=\frac{6-\ln3}{2}$$

Ответ: $\int_{AB}\frac{y-1}{x}dx+\frac{x+1}{y}dy=\frac{6-\ln3}{2}$

Если проинтегрировать наоборот – от точки $B(3;2)$ до точки $A(1;1)$, то получится то же самое, только с другим знаком: $\int_{BA}\frac{y-1}{x}dx+\frac{x+1}{y}dy=\int_3^1\ldots=-\left(\frac{6-\ln3}{2}\right)$ – и здесь легко усмотреть известное свойство $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ определённого интеграла.

Второй способ решения состоит в переходе к интегрированию **по переменной** y. Для этого из уравнения $y=\frac{1}{2}(x+1)$ выразим *обратную функцию*:

$2y=x+1$

$x=2y-1$

и найдём дифференциал: $dx=d(2y-1)=(2y-1)'dy=2dy$.

Чтобы перейти к определённому интегралу, в *подынтегральное выражение* нужно подставить $x=2y-1$ и $dx=2dy$, при этом «игрек» у нас будет изменяться **от** 1 до 2 *(«игрековые» координаты точек A и B)*:

$$\int\limits_{AB} \frac{y-1}{x}dx + \frac{x+1}{y}dy = ... =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{2y-1-1}{2y-1} + 2 \right) dy = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{2y-1} + 2 \right) dy = \int_1^2 \left(3 - \frac{1}{2y-1} \right) dy = 3\int_1^2 dy - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{d(2y-1)}{2y-1} =$$

$$= 3(y)\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\left(\ln|2y-1|\right)\Big|_1^2 = 3(2-1) - \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = 3 - \frac{\ln 3}{2} = \frac{6 - \ln 3}{2}$$

Второй способ оказался технически труднее, но, разумеется, бывает и наоборот. **Поэтому перед решением всегда полезно «прикинуть» оба пути***. И да – **проверка же**, не ленИтесь!

**** Но тут есть исключение:*** *если фрагмент или весь путь интегрирования параллелен координатной оси, то способ остаётся только один! Ибо проекция этого участка на другую ось равна нулю.*

Ответ: $\int\limits_{AB} \frac{y-1}{x}dx + \frac{x+1}{y}dy = \frac{6 - \ln 3}{2}$

Для самостоятельного решения я всегда стараюсь подбирать интересные случаи;)

Пример 57

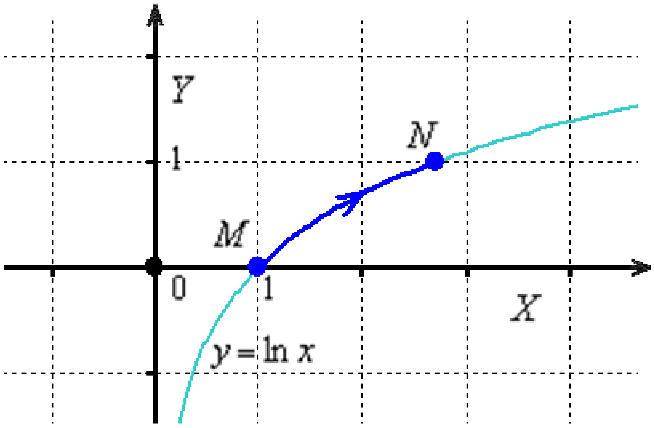
Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy$ от точки $A(1;\,2)$ до точки $B(4;\,3)$ вдоль ломаной, состоящей из отрезков прямых $y = 2,\ y = x - 1$. Выполнить чертёж.

Прорешиваем и продолжаем нарабатывать технические навыки:

Пример 58

Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L \frac{y^2}{x}dx + x^2 dy$, где L – дуга кривой $y = \ln x$ от точки $M(1;\,0)$ до точки $N(e;\,1)$.

Решение: для удобства выполним чертёж, не забывая подметить, что линия интегрирования не может пересекать ось ординат *(т.к. $x \neq 0$)*, впрочем, она здесь заведомо не может – ибо логарифм:



И сейчас я вас познакомлю с ещё одним **приёмом решения**. В силу свойства *аддитивности*, интеграл можно разделить на две части:

$\int\limits_L \frac{y^2}{x}dx + x^2dy = \int\limits_L \frac{y^2}{x}dx + \int\limits_L x^2dy$ и с каждым из них разделаться по отдельности:

1) Вычислим $\int\limits_L \frac{y^2}{x}dx$. Так как $y = \ln x$, то $dy = (\ln x)'dx = \frac{dx}{x}$, а переменная x изменяется от 1 до e:

…

Результат, кстати, не помешает **проверить** интегрированием по «игрек». Для этого найдём обратную функцию $y = \ln x \Rightarrow x = e^y$, дифференциал $dx = d(e^y) = (e^y)'_y dy = e^y dy$, после чего подставим их в подынтегральное выражение, при этом y изменяется от 0 до 1 *(см. чертёж)*:

$\int\limits_L \frac{y^2}{x}dx = \int\limits_0^1 \frac{y^2}{e^y}\cdot e^y dy = \int\limits_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3}(y^3)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$, что и требовалось проверить.

Напоминаю, что второй путь можно смело выбирать и за основной.

Со второй частью всё проще:

2) $\int\limits_L x^2dy = \int\limits_1^e x^2\cdot\frac{dx}{x} = \int\limits_1^e xdx = \frac{1}{2}(x^2)\Big|_1^e = \frac{e^2-1}{2}$

Контроль по «игрек»: …

Осталось просуммировать полученные в пунктах 1) и 2) значения:

$$\int\limits_L \frac{y^2}{x}dx + x^2dy = \frac{1}{3} + \frac{e^2-1}{2} = \frac{2+3e^2-3}{6} = \frac{3e^2-1}{6}$$

Ответ: $\int\limits_L \frac{y^2}{x}dx + x^2dy = \frac{3e^2-1}{6}$

Разделение интеграла особенно удобно в тех случаях, когда подынтегральное выражение сильно «наворочено. Очередная «бомба» для самостоятельного решения:

Пример 59

Проверить, существует ли интеграл по данной кривой, и вычислить его, если это возможно:

$\int\limits_L \frac{y^2+1}{x-2}dx - \frac{x}{y+2}dy$ – по дуге параболы $y = -\sqrt{x}$ от точки $M(1;-1)$ до начала координат.

Выполнить чертёж.

➢ **Если линия задана параметрически**

то задача решается так:

Пример 60

Вычислить интеграл $\int\limits_L x^2ydy - y^2xdx$ по кривой $\begin{cases} x = \sqrt{\cos t} \\ y = \sqrt{\sin t} \end{cases}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Решение: чертежа здесь, благо, не требуют, да он и не нужен – условие таково, что «снимай» данные, да решай.

Как решать? Объясню буквально в семи словах:)

– в подынтегральном выражении нужно всё выразить через параметр.

При этом во многих случаях, и здесь в частности, «начинку» удобно обработать отдельно. Сначала разбираемся с дифференциалами:

$$dx = d(\sqrt{\cos t}) = (\sqrt{\cos t})'dt = \frac{1}{2\sqrt{\cos t}} \cdot (\cos t)'dt = -\frac{\sin tdt}{2\sqrt{\cos t}}$$

$$dy = d(\sqrt{\sin t}) = (\sqrt{\sin t})'dt = \frac{1}{2\sqrt{\sin t}} \cdot (\sin t)'dt = \frac{\cos tdt}{2\sqrt{\sin t}}$$

Теперь без спешки и ВНИМАТЕЛЬНО подставляем их вместе с прародителями $x = \sqrt{\cos t}$, $y = \sqrt{\sin t}$ в *подынтегральное выражение*, после чего аккуратно проводим упрощения:

$$x^2ydy - y^2xdx = \left(\sqrt{\cos t}\right)^2 \cdot \sqrt{\sin t} \cdot \frac{\cos tdt}{2\sqrt{\sin t}} - \left(\sqrt{\sin t}\right)^2 \cdot \sqrt{\cos t} \cdot \left(-\frac{\sin tdt}{2\sqrt{\cos t}}\right) =$$

$$= \cos t \cdot \frac{\cos tdt}{2} + \ldots$$

И что приятно, тут не нужно думать над пределами изменения параметра, эта информация есть в условии:

$$\int\limits_L x^2ydy - y^2xdx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} dt = \frac{1}{2}(t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4}$$

Ответ: $\int\limits_L x^2ydy - y^2xdx = \frac{\pi}{4}$

Самостоятельно:

Пример 61

Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (x-y)dx + xdy$ по верхней половине **эллипса** *(см. Пример 2)* $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$. Интегрировать против часовой стрелки.

3.4. Криволинейный интеграл по замкнутому контуру

Продолжаем решать криволинейные интегралы 2-го рода. Новизна будет состоять в особенности *пути интегрирования*, а именно в его замкнутости. Наверное, всем интуитивно понятно, что это значит – встаньте с места и прогуляйтесь, как вам захочется. После чего вернитесь в исходную точку. Это и есть ***замкнутый контур***. В рамках данной книги я рассмотрю элементарные маршруты без *самопересечений*, такие как окружность, треугольник, квадрат и т.п.

Криволинейный интеграл по замкнутому контуру C так и **обозначают** – с символической окружностью посередине:

$$\oint_C$$

Нередко на окружности рисуют стрелочку, указывая направление движения:

– против часовой стрелки;

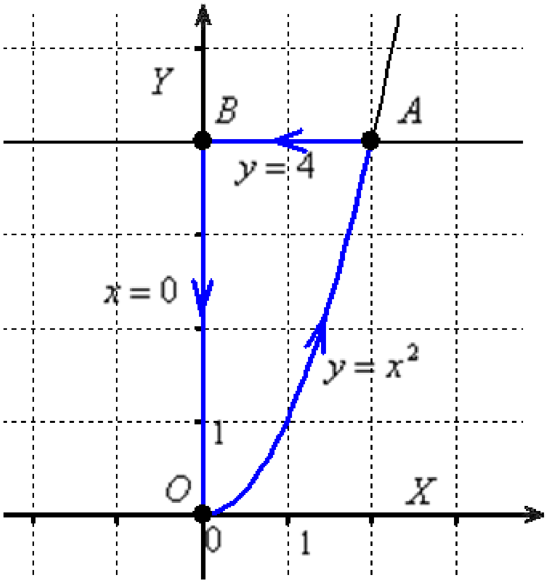
– либо по часовой стрелке.

На практике чаще всего встречается первый вариант, который принято называть ***положительным направлением*** *обхода* контура. Впрочем, чтобы послать по контуру – стрелка не обязательна:)

Пример 62

Вычислить интеграл $\oint_C (2x+y)dx+3xdy$ по контуру C, ограниченному линиями $y=x^2,\ y=4,\ x=0$. Интегрировать против часовой стрелки. Выполнить чертёж.

Решение: Слушаемся и повинуемся:)



! Напоминаю, что для криволинейного интеграла 2-го рода принципиально важнО направление интегрирования, и поэтому на чертеже крайне желательно проставлять стрелочки.

В силу свойства аддитивности, криволинейный интеграл по контуру $OABO$ можно представить в виде суммы трёх интегралов:

…

И теперь, вы, наверное, поняли, что нас ждёт дальше ☺.

1) Вычислим интеграл по дуге OA параболы. Если $y = x^2$, то:
$dy = d(x^2) = (x^2)'dx = 2xdx$

В соответствии с направлением, x изменяется от 0 до 2:

$$\int_{OA}(2x+y)dx+3xdy = ... =$$
$$= \left(x^2 + \frac{7}{3}x^3\right)\Bigg|_0^2 = 4 + \frac{56}{3} - 0 - 0 = \frac{68}{3}$$

Желающие могут выполнить проверку: выразить нужный кусок параболы: $x = \sqrt{y}$, найти dx и проинтегрировать по «игрек» от 0 до 4.

2) Вычислим интеграл по отрезку AB прямой $y = 4$. С дифференциалом тут всё просто: $dy = d(4) = (4)'dx = 0$, а вот с пределами интегрирования не очень – интегрировать нужно **строго по заданному направлению**, то есть **от** 2 до 0 *(см. чертёж выше)*:

$$\int_{AB}(2x+y)dx+3xdy = \int_2^0\left((2x+4)dx+3x\cdot 0\right) = \int_2^0(2x+4)dx = (x^2+4x)\Big|_2^0 = 0+0-4-8 = -12$$

3) И, наконец, интеграл по фрагменту BO оси ординат. Если $x = 0$, то, понятно, что $dx = 0$, и «игрек» изменяется (внимание!) **от** 4 до 0:

$$\int_{BO}(2x+y)dx+3xdy = \int_4^0\left((2\cdot 0+y)\cdot 0+3\cdot 0\cdot dy\right) = \int_4^0 0dy = 0$$

Осталось просуммировать три куска и получить результат по всему контуру:

$$\oint_{OABO}(2x+y)dx+3xdy = \frac{68}{3} - 12 + 0 = \frac{68}{3} - \frac{36}{3} = \frac{32}{3}$$

Ответ: $\oint_{OABO}(2x+y)dx+3xdy = \frac{32}{3}$

Если контур обойти **по** часовой стрелке, то получится противоположное значение:

$$\oint_{OBAO}(2x+y)dx+3xdy = -\frac{32}{3}.$$

Другой очевидный факт состоит в том, что если мы начнём свой путь из любой другой точки контура и совершим «оборот» *(в том или ином направлении)*, то значение интеграла не изменится.

Что можно сказать по поводу выполненного задания?

Решение хорошее, решение логичное, однако у него есть существенный недостаток. Оно длинное.

…Но это не беда! Если нет беды с двойными интегралами ☺. Для простых контуров существует:

3.5. Формула Грина – Остроградского

Или, как её чаще называют – просто **формула Грина**, которую обычно записывают для положительного направления обхода контура:

$\oint\limits_C P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$, где D – замкнутая область, ограниченная контуром C.

Примечание: *функции $P(x;y), Q(x;y)$ должны быть определены и непрерывны в области D и, кроме того, иметь в ней непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$.*

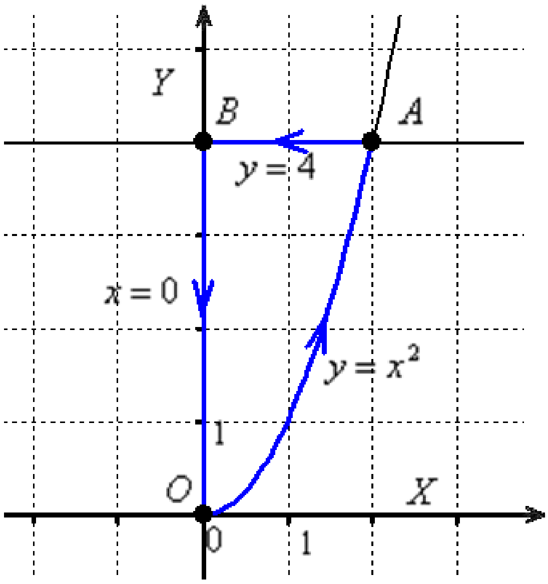
! Замечание: *буквы P, Q – стандартны,* ***не меняем их и не переставляем****!*

Решим наш интеграл $\oint\limits_C (2x+y)dx + 3xdy$ по формуле Грина. Сначала найдём частные производные:

$$P = 2x + y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = (2x+y)'_y = 0 + 1 = 1$$

$$Q = 3x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = (3x)'_x = 3$$

Для наглядности скопирую чертёж сверху:



Область D ограничена контуром C *(синими линиями)* и мы выбираем её привычный порядок обхода: $\begin{matrix} x^2 \le y \le 4 \\ 0 \le x \le 2 \end{matrix}$. В результате чего получаем:

$$\oint\limits_C (2x+y)dx + 3xdy = ... =$$

$$= 2\int\limits_0^2 (y)\Big|_{x^2}^4 dx = 2\int\limits_0^2 (4 - x^2)dx = 2\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 2\left(8 - \frac{8}{3} - (0-0)\right) = 2 \cdot \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

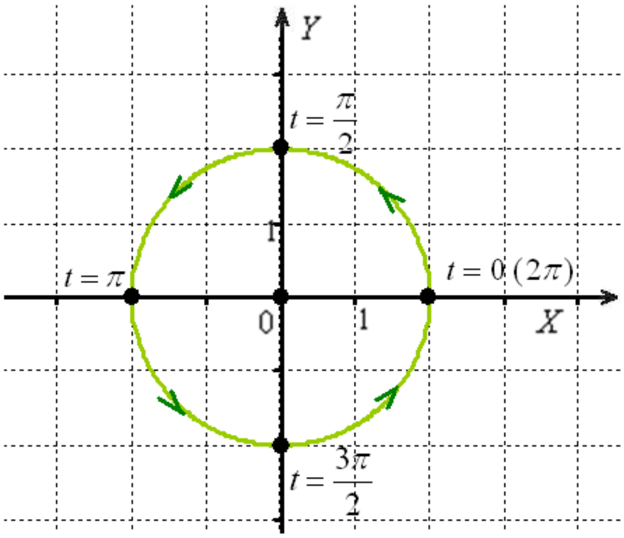
Как видите, решение сильно сократилось, а иногда оно сокращается просто фантастически! Чему посвящён следующий пример:

Пример 63

Вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_C (x+y)dx+(x-y)dy$ по окружности $x^2+y^2=4$: а) непосредственно, б) по формуле Грина.

Решение: естественно, здесь не нужно мучиться с полуокружностями и их уравнениями $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=-\sqrt{4-x^2}$ *(хотя можно)* – гораздо проще представить уравнение окружности $x^2+y^2=2^2$ в *параметрической форме*, которая уже неоднократно встречалась ранее: $x=2\cos t,\ y=2\sin t$

В условии ничего не сказано о направлении обхода контура, но пункт «бэ» толсто намекает, что лучше двигаться против часовой стрелки. К тому же, традиционное возрастание параметра $0\le t\le 2\pi$ как раз и обеспечивает «виток» именно в этом направлении:



Чертёж, к слову, был вовсе не обязателен, и ввиду простоты контура можно было обойтись и без него. Однако не в этот раз – **пожалуйста, ХОРОШО запечатлейте эту картинку в своём сознании!**

а) Вычислим криволинейный интеграл непосредственно. Алгоритм решения обычный – «начинку» интеграла нужно «заправить» буквой «тэ». Найдём дифференциалы:

$$dx=d(2\cos t)=(2\cos t)'dt=-2\sin t dt$$

$$dy=d(2\sin t)=(2\sin t)'dt=2\cos t dt$$

и подставим $x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ dx=-2\sin t dt,\ dy=2\cos t dt$ в подынтегральное выражение. Чтобы не запутаться рекомендую оформлять преобразования «столбиком»:

…

$=4(\cos 2t-\sin 2t)dt$, на последнем шаге использованы *формулы двойного угла*, надеюсь, вы их не забудете в любом состоянии =)

Таким образом, криволинейный интеграл:

$$... = 4\left(\frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{2}\cos 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\sin 4\pi + \frac{1}{2}\cos 4\pi - \frac{1}{2}\sin 0 - \frac{1}{2}\cos 0\right) = 4\left(0 + \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

б) Вычислим интеграл по формуле Грина:

$\oint\limits_C P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$, где D – замкнутая область, ограниченная контуром C. В данном случае это *круг* радиуса 2. Но возиться с полуокружностями не придётся и здесь! – поскольку:

$$P = x + y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 + 1 = 1$$

$$Q = x - y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 - 0 = 1$$

и сбылась мечта тунеядца:)

$$\oint\limits_C (x + y)dx + (x - y)dy = \iint\limits_D (1 - 1)dxdy = 0$$

Ответ: $\oint\limits_C (x + y)dx + (x - y)dy = 0$

И это не только приятный, но ещё и крайне интересный случай. Если криволинейный интеграл по замкнутому контуру равен нулю, то речь заходит об очень крутом свойстве! Даже о нескольких крутых свойствах. Должен предупредить, что сейчас я буду вольно пересказывать теоремы математического анализа, и если вы учитесь основательно, то обязательно загляните в 3-й том Фихтенгольца (например).

Рассмотрим две **произвольные** точки области D *(круга)*. Очевидно, что их можно соединить бесчисленным количеством *кусочно-гладких* маршрутов, не выходящих за пределы области. Так вот – какой бы из этих путей мы ни выбрали, то **во всех случаях** криволинейный интеграл будет равняться **одному и тому же значению**!

Но это только «вершки». Поскольку функции $P(x;y) = x + y,\ Q(x;y) = x - y$ *определены* и *непрерывны* во всех точках плоскости XOY, то то же самое справедливо и для любых двух точек плоскости! То есть, мы можем зафиксировать вообще любые две точки (какие понравятся) и составить бесконечно много *кусочно-гладких* маршрутов между ними. И криволинейные интегралы по всем этим маршрутам будут равны одному и тому же числу! **В таких случаях говорят, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования**, а зависит только от начальной и конечной точки.

Более того, если мы возьмём произвольный <u>замкнутый</u> *кусочно-гладкий* контур C^* в плоскости XOY, то интеграл по любому такому контуру будет равен нулю:

$$\oint\limits_{C^*} (x + y)dx + (x - y)dy = 0$$

Вернёмся к только что разобранному примеру и рассмотрим **произвольную** пару точек, лежащую внутри круга $x^2 + y^2 \le 2^2$ – проще всего взять точки $O(0;0),\ A(1;1)$. Теперь вычислим криволинейный интеграл двумя способами:

1) По отрезку OA *прямой* $y = x$. Тут всё элементарно: $dy = dx$ и:

$$\int_{OA}(x+y)dx+(x-y)dy=\int_0^1\left((x+x)dx+(x-x)dx\right)=\int_0^1 2xdx=(x^2)\Big|_0^1=1-0=1$$

2) По дуге OA *параболы* $y = x^2$. В этом случае $dy = 2xdx$ и:

$$\int_{OA}(x+y)dx+(x-y)dy=...=$$

$$=\int_0^1(x+3x^2-2x^3)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x^3-\frac{x^4}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}-(0+0-0)=1$$

Самостоятельно вычислите этот же интеграл по дуге OA *кубической параболы* $y = x^3$. Получится единица. Или по какой-нибудь простенькой ломаной, например, по ломаной OBA, где $B(0;1)$. Тоже получится единица! Возьмите точку $B(0;3)$ вне круга и снова получИте свою законную единицу! И вообще – если выбрать **любой** *кусочно-гладкий* путь от точки O до точки A, то криволинейный интеграл **во всех случаях** будет равняться единице! Сколь бы долгим и запутанным ни был маршрут в плоскости XOY, сколько бы он не самопересекался (да, даже так).

Иными словами, **значение криволинейного интеграла не зависит от пути интегрирования**. И, как я уже отметил выше, в нашем примере можно взять вообще две любые точки плоскости XOY, и криволинейный интеграл не будет зависеть от пути интегрирования. Напоминаю, что **всё это последовало из того, что мы получили ноль хоть по какому-то замкнутому контуру** (по окружности в нашем примере), а также из того факта, что функции $P(x;y)=x+y,\ Q(x;y)=x-y$ непрерывны всюду.

Но открытия только начинаются!

Если $\oint_C P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0$, то *подынтегральное выражение* является **полным дифференциалом** некоторой *функции двух переменных* $U(x;y)$. Данная функция **называется** ***потенциальной*** или просто ***потенциалом***. Как её найти? Очень просто. Нужно решить $P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0$ – **дифференциальное уравнение в полных дифференциалах**.

Для «начинки» нашего нулевого интеграла $\oint_C (x+y)dx+(x-y)dy$ таковой функцией является: $U(x;y)=\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}+C$, где $C=const$

И в самом деле, её *полный дифференциал*:

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=\left(\frac{2x}{2}+y-0+0\right)dx+\left(0+x-\frac{2y}{2}+0\right)dy=(x+y)dx+(x-y)dy\ –$$

в точности подынтегральное выражение.

Ну и, наверное, вы поняли, что равенство $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, которое обеспечивает ноль в формуле Грина, есть не что иное, как равенство **смешанных производных 2-го порядка**.

Более того, для **любых** двух точек N и M области D (и вообще всей плоскости XOY) криволинейный интеграл $\ldots$ **– равен постоянной величине, которая не зависит от пути интегрирования**.

Так, в нашем примере с точками $O(0;0)$, $A(1;1)$ было совсем не обязательно перебирать множество маршрутов – достаточно найти *потенциальную функцию* $U(x;y)=\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}+C$ *(решив **ДУ** в полных дифференциалах)* и вычислить криволинейный интеграл по формуле:

$$\int_{OA}(x+y)dx+(x-y)dy=\ldots$$

Разность $U(M)-U(N)$ называют ***разностью потенциалов***, и я так вижу, у физиков уже появился здоровый блеск в глазах ^ : ^ Поэтому не буду томить вас ожиданием и быстро перейду к следующему параграфу:

3.6. Физический смысл криволинейных интегралов

Сначала совсем кратко, почти в качестве оффтопа

➢ Смысл интеграла 1-го рода

Криволинейный интеграл первого рода по *кусочно-гладкой* дуге L численно равен массе этой дуги: $\int_L \rho(x;y)dl=m$, где $\rho=\rho(x;y)$ – функция её *плотности*, которая каждой точке $(x_0;y_0)$ дуги ставит в соответствие её значение плотности ρ_0 в этой точке.

Примера не будет ввиду крайней редкости этой задачи, поэтому сразу суть криволинейного интеграла 2-го рода и гвоздь программы:

➢ Работа векторного поля

Пусть ***материальная точка*** под воздействием *силы* **векторного поля** $\bar{F}(x;y)=P(x;y)\bar{i}+Q(x;y)\bar{j}$ совершает движение в плоскости и проходит путь L. Тогда ***работа*** *векторного поля* по перемещению этой точки определяется формулой: $W=\int_L P(x;y)dx+Q(x;y)dy$. Данная величина стандартно измеряется в *Джоулях*, но в математических задачах размерность почти никогда не указывается, и я тоже буду придерживаться этого стиля.

Давайте разбираться. Приведу не совсем строгий, но зато вполне понятный пример: представьте, что у вас на столе лежит плоский и достаточно тонкий магнит. Из жизненного опыта все хорошо знают, что чем ближе поднести к нему какую-нибудь железку, тем сильнее она будет притягиваться. В физике это «сильнее» измеряется векторной величиной под названием ***напряжённость магнитного поля***:

– **каждой** точке $(x; y)$ поверхности стола ставится в соответствие ***несвободный вектор*** $\overline{F}$, указывающий направление действия силы *(магнитного поля)* и её величину **в данной точке** *(чем ближе к магниту, тем длиннее вектор)*. Множество этих векторов (рассматриваем только плоскость) образует двумерное *векторное поле*. Такое поле можно формализовать ***векторной функцией скалярного аргумента***:

$$\overline{F}(x; y) = P(x; y)\overline{i} + Q(x; y)\overline{j}$$

И в самом деле, если мы начнём подставляться координаты $(x; y)$ различных точек *(скалярные аргументы)*, то «на выходе» будем получать различные векторы $\overline{F}(x; y)$. Чтобы было понятнее, приведу конкретный пример: $\overline{F}(x; y) = (2x - y)\overline{i} + y^2\overline{j}$ – найдём значение этой функции, например, в точке $M(1; 2)$:

$\overline{F}(1; 2) = (2 \cdot 1 - 2)\overline{i} + 2^2\overline{j} = 4\overline{j}$ – в результате получен вектор, который, повторюсь, **привязан** к точке M и свободному перемещению не подлежит!

Теперь недалеко от магнита бросим железную пылинку, которая под действием *силы* магнитного поля проделает путь L *(за некоторое время)*. Таким образом, данное векторное поле совершило работу $W = \int\limits_L P(x; y)dx + Q(x; y)dy$ по перемещению этой пылинки. А вы как думали? – работают даже магниты! Всегда вспоминайте об этом, когда устанете от какой-нибудь работы =)

И совсем понятный пример находится у многих под рукой, а именно компьютерная мышка – переместите её по произвольной траектории. Сила ваших мускулов совершила работу по перемещению мыши. Однако обывательское и физическое понимание *работы* отличаются, и к этому вопросу я вернусь буквально через несколько строк:

Пример 64

Вычислить непосредственно и с помощью формулы Грина работу векторного поля $\overline{F}(x; y) = (x^2 - 3y^2 + 1)\overline{i} - (xy - 5)\overline{j}$ по контуру, представляющему собой треугольник с вершинами в начале координат и точках $M(2; 0)$, $N(0; 1)$ (контур интегрирования следует обходить против движения часовой стрелки).

Решаем самостоятельно! Краткое решение и ответ в конце книги. И не такое оно, между прочим, простое, как может показаться ;-)

Не удивляйтесь, если работа будет получаться отрицательной – знаки «плюс» и «минус» указывают направление действия силы. Так, если вы переместите мышь вправо, то, условно говоря, совершите работу $W = 5$. Теперь возвращаем её в исходную точку *(не обязательно по той же траектории)* и предполагаем, что усилий затрачено столько же. Тот факт, что сила ваших мускулов работала в противоположном направлении, и выражается знаком «минус»: $W = -5$.

Вы поработали? Безусловно. Хотя и не перетрудились =) **Но с точки зрения физики никакой работы не совершено!** И действительно, работа по *замкнутому контуру* составила $5 + (-5) = 0$. Вот так вот своими руками вы смоделировали особый вид поля! О котором далее:

Если интеграл по замкнутому контуру равен нулю, то соответствующее *векторное поле* называют ***потенциальным***. Проверим, будет ли оно таковым в Примере 64:

$$P = x^2 - 3y^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -6y$$

$$Q = -(xy - 5) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -y$$

$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, следовательно, потенциальной функции не существует и *поле* $\overline{F}(x;\, y)$ не *потенциально*. Поэтому можно сразу сказать, что интеграл по замкнутому контуру $\oint\limits_{OMNO} (x^2 - 3y^2 + 1)dx - (xy - 5)dy \neq 0$

Кстати, такое задание иногда встречается: *проверить будет ли данное поле потенциальным и если да, то найти его потенциал*. Напоминаю, что для нахождения потенциальной функции нужно решить **дифференциальное уравнение в полных дифференциалах**. Ну а как решить эту задачу в пространственном случае, я рассказываю на сайте, а другой теме – **теория поля**. …Да, начинается полный хардкор ☺.

И в заключение курса мы как раз немного поговорим

3.7. О криволинейных интегралах в пространстве

А почему нет? Никто же не запрещает интегрировать по пространственным кривым. Все только разрешают =)

На самом деле я мог бы начать и с них, но, во-первых, такие задачи значительно реже встречаются на практике, и, во-вторых, возникла бы неслабая путаница.

Пространственная кривая, как правило, задаётся *параметрическими уравнениями* $L:\ x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$, и по большому счёту новизна состоит в дополнительной координате.

Так, например, криволинейный интеграл 1-го рода, рассчитывается по формуле:

$$\int\limits_L f(x;y;z)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t);y(t);z(t)) \cdot \sqrt{(x'_t(t))^2 + (y'_t(t))^2 + (z'_t(t))^2}\,dt \quad (t_1 \le t \le t_2)$$, и его

физический смысл – это масса пространственной линии L, где $\rho = f(x;y;z)$ – функция её плотности.

Криволинейный интеграл 2-го рода запишется в виде:

$\int\limits_L P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz$, и, наверное, вы уже догадываетесь, как его решать.

Осталось подтвердить свою догадку решением заключительного примера, решаем торжественно, решаем с энтузиазмом, решаем самостоятельно:

Пример 65

Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (2x+z)dx + 3xdy + ydz$, где L – первый виток *винтовой линии* $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 2t \quad (0 \le t \le 2\pi)$.

Тот, кто хорошо разобрался с параметрическими уравнениями окружности, легко представит эту линию в уме. Впрочем, информацию не сложнее разыскать в Сети.

Аналогично – предложенный криволинейный интеграл можно интерпретировать, как работу трёхмерного векторного поля $\overline{F}(x;\, y;\, z) = (2x+z)dx + 3xdy + ydz$ по перемещению материальной частицы вдоль пространственной кривой L.

Следует добавить, что работа – есть «главный» физический смысл криволинейного интеграла второго рода, но далеко не единственный. Криволинейные интегралы нашли широкое применение в физике, с помощью них можно подсчитать много других величин.

И, к слову, термин «поле» – он не физический, а относится именно к математике! Силовые же физические поля – лишь частные примеры.

И я вас поздравляю!
Это было непросто, но интересно. …Наверное ☺.

С дополнительной, в том числе теоретической информацией можно ознакомиться в **соответствующем разделе** портала mathprofi.ru, а также в учебной литературе, в частности, рекомендую: *К.А. Бохан* 2-й том, *Г.М. Фихтенгольц*, 3-й том

Для тех, кто заинтересовался – есть продолжение, а именно, **поверхностные интегралы**. Сложновато, но подъёмно ☺;) Также логическим продолжением темы является **теория поля**.

Желаю успехов!

4. Решения и ответы

Пример 2. ***Решение:*** *Изобразим область на чертеже:*

Выберем следующий порядок обхода области:

Таким образом:

Перейдём к обратным функциям:

Изменим порядок обхода области:

Таким образом:
Ответ:

Пример 4. ***Решение:*** *Перейдём к обычным (прямым) функциям:*

Выполним чертёж:

Изменим порядок обхода области:

Ответ:

Пример 6. ***Решение:*** *Выполним чертеж:*

Перейдем к обратным функциям:

Изменим порядок интегрирования, разделив область интегрирования на две части. При этом порядок обхода соответствующих частей:
1),   2)

Ответ:

Пример 8. ***Решение:*** *Изобразим область интегрирования на чертеже:*

Изменим порядок обхода области:

Ответ:

Пример 10. ***Решение:*** *изобразим искомую фигуру на чертеже:*

Площадь фигуры вычислим с помощью двойного интеграла по формуле

Выберем следующий порядок обхода области:

Таким образом:

1)
2)

Ответ:

Пример 12. ***Решение:*** *изобразим данную фигуру на чертеже:*

Используем формулу, где – искомая фигура
Перейдём к обратным функциям:

и выберем наиболее выгодный порядок обхода области:

Таким образом:

1)
2)

Ответ:

Пример 14. ***Решение:*** *Изобразим область на чертеже:*

Выберем следующий порядок обхода:

Таким образом:

Справка: *для кратных интегралов справедливо свойство линейности, поэтому константу (два) можно сразу вынести за интегралы, но важно её потом* ***не потерять.***

1)
2)

Решим задачу вторым способом. Найдём обратную функцию и изменим порядок обхода области:

Таким образом:

1)

2)

Ответ:

Пример 16. ***Решение:*** *изобразим область на чертеже:*

Выберем следующий порядок обхода области:

Таким образом:

, интегралы вычислим по отдельности:

1);

2)

Ответ:

Пример 18. ***Решение:*** *изобразим область интегрирования на чертеже:*

Выберем следующий порядок обхода области:

Таким образом:

1)
2)

Ответ:

Пример 20. ***Решение:*** *Изобразим область интегрирования на чертеже:*

Выберем следующий порядок обхода области:

Таким образом:

1)

2)

Ответ:

Пример 22. ***Решение:*** *Изобразим область интегрирования на чертеже:*

Найдём обратную функцию и выберем наиболее выгодный порядок обхода области:

Таким образом:

1)
2)

Ответ:

Пример 25. ***Решение***: *выделим полные квадраты и определим тип линий:*

– окружность единичного радиуса с центром в точке;

– окружность единичного радиуса с центром в точке.
Изобразим область интегрирования на чертеже:

Площадь фигуры вычислим с помощью двойного интеграла, используя полярную систему координат.

По формулам перехода:

Найдём угол наклона прямой:

Таким образом, порядок обхода области:

и:

1) Вычислим внутренний интеграл:

2) Вычислим внешний интеграл, используем формулу понижения степени:

Ответ:

Пример 26. ***Решение***: *найдём уравнения линий в полярной системе координат, используя формулы перехода*:

Определим углы наклона прямых:

Изобразим область интегрирования на чертеже:

Порядок обхода области:

Таким образом:

1) Вычислим внутренний интеграл:

2) И внутренний, понижая степень косинуса:

Ответ:

Пример 28. ***Решение****: используя формулы, перейдём к полярной системе координат:*

Преобразуем также и подынтегральную функцию:

Изобразим область интегрирования на чертеже:

Порядок обхода области:

Таким образом:

1)

2)

Ответ*:*

Пример 30. ***Решение****: выполним чертёж:*

Координаты центра тяжести фигуры найдём по формулам, где Порядок обхода области:

1) Вычислим площадь фигуры:

2-3) Найдём «иксовый» и «игрековый» интегралы:

По соответствующим формулам:
Ответ*:*

Пример 31. ***Решение***: *выполним чертёж:*

Прямая рассекает круг на 2 части, и дополнительное ***условие*** *указывает на то, что речь идёт именно о маленьком заштрихованном кусочке.*

Фигура симметрична относительно прямой (изображена пунктиром), поэтому центр тяжести должен лежать на данной линии. И, очевидно, что его координаты равны ***по модулю***.

Порядок обхода фигуры:

1) Вычислим площадь фигуры:

С первым интегралом сложностей никаких, во втором – проводим стандартную замену. Тогда:

Если, то .

Вычислим новые пределы интегрирования:

(прикидывая «по клеточкам» на чертеже, результат похож на правду)

2) Найдём.

*После непростых и длительных вычислений вновь обращаем свой взор на чертёж (**помним, что точки мы пока не знаем!**) и получаем глубокое моральное удовлетворение от найденного значения.*

3) Исходя из проведённого ранее анализа, осталось убедиться, что.

Отлично:

*Изобразим точку на чертеже. В соответствии с формулировкой условия запишем её как окончательный **ответ**:*

Пример 33. ***Решение****: изобразим данное тело на чертеже.*

Выберем следующий порядок обхода:

Объём тела вычислим с помощью тройного интеграла:

1)

2)

3)

Ответ*:*

Пример 35. ***Решение****: изобразим проекцию данного тела на плоскость:*

Данное тело ограничено параболическими цилиндрами сбоку, плоскостью – снизу и плоскостью – сверху.

Плоскость лучше всего изобразить
в отрезках*:*

Выберем следующий порядок обхода тела:

Таким образом:

1)

2)

3)

***Ответ**:*

Пример 37. ***Решение**: изобразим проекцию данного тела на плоскость*

Данное тело ограничено параболическим цилиндром и плоскостью сбоку, плоскостью – снизу и параболическим цилиндром – сверху. Порядок обхода тела:

Объём:

1)

2)

3)

***Ответ**:*

Пример 39. ***Решение***: *данное тело ограничено плоскостью снизу, эллиптическим параболоидом – сверху и цилиндром – сбоку. Выполним чертежи:*

Объём тела вычислим с помощью тройного интеграла, используя цилиндрическую систему координат:

Порядок обхода тела:

Таким образом:

1)

2)

3)

Ответ:

Пример 41. ***Решение***: *неравенство задаёт шар с центром в начале координат радиуса, а неравенство – внешнюю часть кругового цилиндра радиуса, включая сам цилиндр. Условие определяет верхнее полупространство, включая плоскость.* *Таким образом, данное тело ограничено плоскостью снизу, сферой – сверху и цилиндрической поверхностью – изнутри:*

Проекция тела на плоскость представляет собой кольцо с внутренним радиусом и внешним радиусом. Объём тела вычислим с помощью тройного интеграла, используя цилиндрические координаты. Найдём уравнение верхней полусферы:

Порядок обхода тела:

Таким образом:

1);

2)

;

3)

.

Ответ:

Пример 43. ***Решение****: изобразим проекцию данного тела на плоскость:*

Сверху тело ограничено эллиптическим параболоидом.
Выберем следующий порядок обхода:

Таким образом:

Примечание: *в «зетовом» интеграле сумма считается константой, поэтому её удобно сразу вынести в следующий интеграл.*

1)

2)

3)

Ответ*:*

Пример 45. ***Решение****: выполним чертёж:*

Анализируя подынтегральную функцию, приходим к выводу, что в первую очередь выгодно интегрировать по «игрек», поскольку множители сразу уйдут из внутреннего интеграла.

В этой связи выберем следующий порядок обхода тела:

Таким образом:

1) Вычислим простой внутренний интеграл:

2) Во вторую очередь выгодно интегрировать по «зет», так как здесь можно сократить на «зет» и снова получается несложный интеграл:

3) И, наконец, внешний интеграл:

Ответ*:*

Пример 47. ***Решение****: данное тело представляет собой фрагмент кругового цилиндра, заключенного между плоскостями:*

Проекция данного тела на плоскость представляет собой круг единичного радиуса, и поэтому здесь удобно перейти к цилиндрической системе координат:

с очевидным порядком обхода тела:

Таким образом:

1);   2);

3) Используя формулу понижения степени, вычислим внешний интеграл:

Ответ*:*

Пример 49. ***Решение****: выполним чертежи (см. Пример 46):*

*Образующие шарового сектора наклонены к плоскости под углом *, и поэтому здесь удобно использовать сферические координаты:*

** В частности это следует из того факта, что сфера пересекает конус на высоте, а проекция тела на плоскость имеет тот же радиус.*

Уравнение сферы в сферической системе:

*«Луч радара» исходит из начала координат и выходит из тела через сферу:
, при этом зенитный угол проходит значения:, а азимутальный угол при этом совершает полный оборот.*

Подынтегральная функция принимает вид:

Таким образом:

1)

2) Подводим под знак дифференциала:

3) И, наконец:

Ответ:

Пример 51. ***Решение****: искомое тело ограничено эллиптическим параболоидом снизу и конической поверхностью – сверху; параболоид и конус пересекаются в плоскости по окружности (выкладки и чертёж – см. в Примере 40). Поскольку, то речь идёт о правом (относительно плоскости) полупространстве, и проекцией тела на плоскость является верхний полукруг единичного радиуса:*

Массу тела вычислим с помощью тройного интеграла, используя цилиндрическую систему координат:

Найдём уравнения поверхностей в этой системе:

Порядок обхода тела:

Подынтегральная функция плотности в цилиндрических координатах:

Таким образом:

1)

2)

3)

***Ответ**: массы на тело*

Пример 52. ***Завершение решения:***

3) Третья «простыня»:

В результате:

4) И заключительный, более короткий интеграл:

Отмечаем на чертеже найденную точку центра тяжести и её же записываем в ***ответ:***

Пример 54. **Решение**: *выполним чертёж:*

Вычислим интеграл

Интегрирование проведём по переменной от точки до точки. Так как, то используем формулу

.

Примечание: *можно интегрировать в обратном направлении (от 0 до –1), но тогда к интегралу следует добавить «минус».*

Верхняя полуокружность задаётся функцией. Найдём производную:

и упростим корень:

Таким образом:

Ответ:

Геометрическое пояснение *к задаче: цилиндр высекает из поверхности «ниточку», которая лежит ниже плоскости, поэтому результат и получился отрицательным. Этот факт можно было установить сразу – аналитически: так как дуга лежит во 2-й координатной четверти (), то.*

Чтобы вычислить площадь криволинейного фрагмента цилиндра (который расположен между дугой и «ниточкой»), к интегралу нужно добавить знак «минус» (коль скоро фрагмент расположен ниже плоскости):. И в результате вычислений получится

Пример 57. ***Решение****: выполним чертёж:*

Интеграл по ломаной вычислим как сумму интегралов по её звеньям:

1) На отрезке, при этом переменная x изменяется от 1 до 3:

Примечание: *т.к. отрезок параллелен оси абсцисс, то 2-й способ решения (интегрирование по «игрек») не проходит, ибо проекция отрезка на ось вырождена в точку.*

2) На отрезке, при этом переменная «икс» изменяется от 3 до 4:

Ответ*:*

Пример 59. ***Решение****: линия интегрирования спрямляема, непрерывна и не пересекает прямые, значит, данный криволинейный интеграл существует. Выполним чертёж:*

Пользуясь свойством линейности, представим интеграл в виде суммы двух интегралов:

1) Вычислим.

, при этом изменяется от 1 до 0:

2) Вычислим

.

, при этом изменяется от –1 до 0:

В результате:

Ответ*: интеграл по данной кривой существует и равен*

Пример 61. ***Решение***: *запишем параметрические уравнения эллипса:*

Найдём дифференциалы:

Выполним подстановку и упростим подынтегральное выражение:

Предложенной дуге и направлению интегрирования соответствует изменение параметра от 0 до:

Ответ:

Пример 64. ***Решение***: *выполним чертёж:*

I. Вычислим работу векторного поля непосредственно. Интеграл по замкнутому контуру вычислим как сумму трёх интегралов по его трём частям:

1) На отрезке, изменяется от 0 до 2:

2) Уравнение, содержащее отрезок, составим по точкам:

при этом переменная изменяется ***от*** *2 до 0 (см. чертёж):*

3) На отрезке, изменяется от 1 до 0:

Таким образом, работа векторного поля по данному контуру:

II. Вычислим криволинейный интеграл по формуле Грина:

В данном случае:

Таким образом:

***Ответ**:*

Пример 65. ***Решение**: найдём дифференциалы: и подставим их вместе с в подынтегральное выражение:*

Для удобства разделим интеграл на 4 части и вычислим их по отдельности:

1)
2)

интегрируем по частям:

3)
4)

В результате сумма четырёх интегралов:

Ответ: